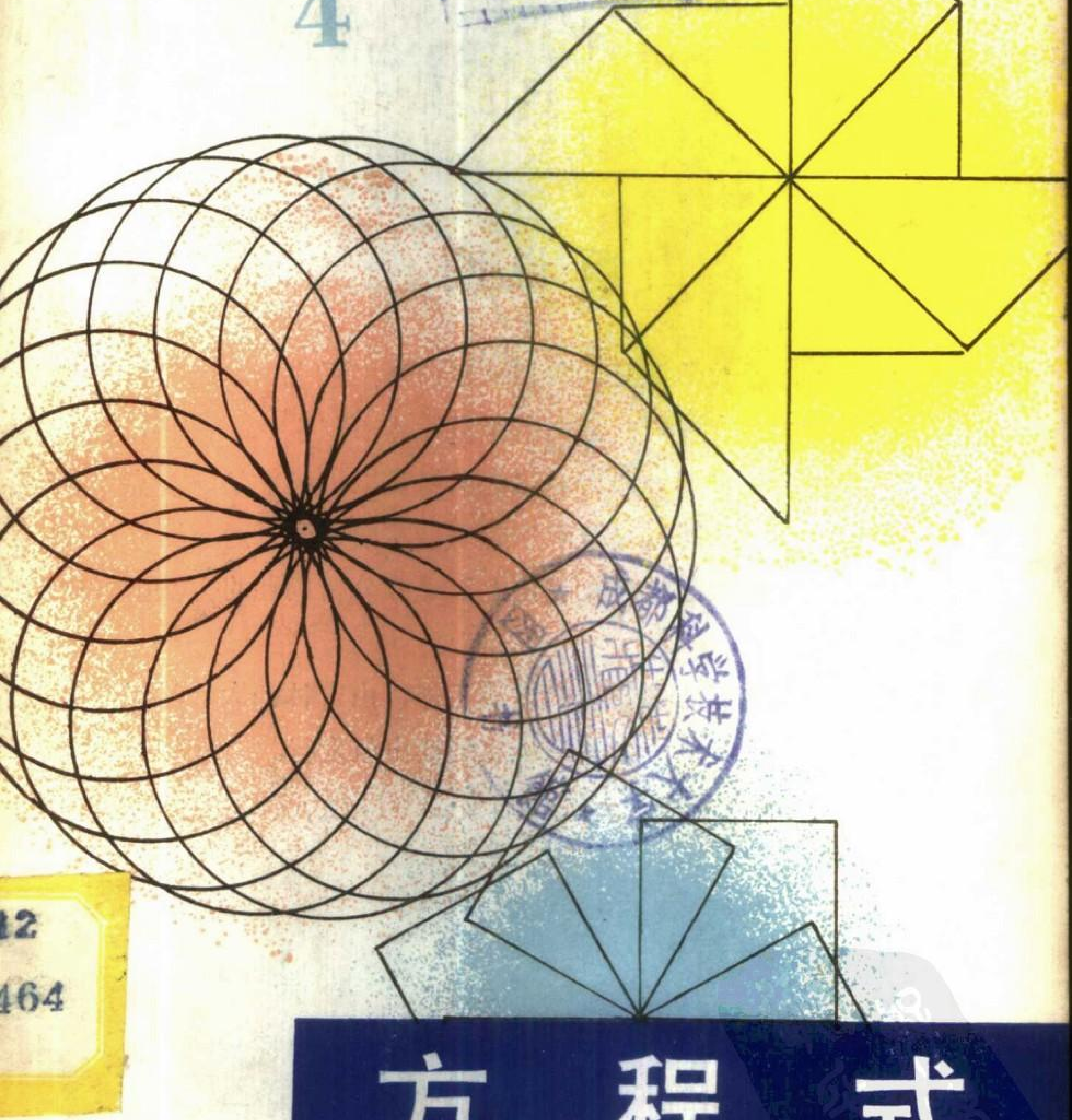
日本中学生数学丛书

4



方程式

633111
大学图书馆
本馆藏
31312
7/4464
T·4
42
464
成都科学技术大学

日本中学生数学丛书（4）

方程式

［日］村野英克 著

任永泰 译　　马忠林 审校

吉林人民出版社

内 容 提 要

《方程式》是日本山梨大学教授横地 清主编的中学生数学丛书第4卷。本书共分五章：有集合，数与方程，一次方程，二次方程和复数等。主要应用集合概念讲述一次方程和二次方程，特别是着重地探讨了方程的解与图象的关系。由于解方程的需要，同时扩展了数的概念。在有理数的基础上，先扩展到实数，进而扩展到复数。数概念扩展与方程的讲述配合恰到好处。

本书的特点是紧密结合生活实际详尽地讲述概念和一些理论，讨论问题细致深入，语言通俗生动。是广大中学数学教师教学、备课较适用的参考书，是中学生丰富数学知识不可多得的一本课外读物。

日本中学生数学丛书（4）

方 程 式

〔日〕村野英克　著

任永泰　马忠林　审校

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　$4\frac{1}{8}$印张　71,000字

1981年3月第1版　1981年3月第1次印刷

印数：1--7,980册

书号：13091·69　定价：0.55元

出版说明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社　　一九八〇年元月

目　　录

第一章　谈谈集合

§ 1　事物的集体……1

（1）集合……1

（2）子集与全集……4

§ 2　并集和交集……7

（1）“或”和“与”……7

（2）并集和交集……11

§ 3　点的集合……14

（1）点和直线……14

（2）直线和平面……17

第二章　数与方程

§ 1　数集与数轴……18

（1）整数与有理数……18

（2）数轴……23

（3）无理数……26

§ 2　等式和不等式……29

（1）什么是等式？……………………………29
（2）等式的性质……………………………31
（3）不等式和区间……………………………33
§3　方程和它的解……………………………36
（1）什么是方程？……………………………36
（2）方程的解……………………………40
方程的历史(其一)……………………………43

第三章　一次方程

§1　同解变形……………………………44
（1）同解方程……………………………44
（2）同解变形……………………………49
§2　一次方程的解法……………………………51
（1）一次方程的解法……………………………51
（2）各种例子……………………………54
§3　多变数的方程……………………………58
§4　联立方程……………………………62
（1）联立方程……………………………62
（2）联立方程的解法……………………………65
（3）三元一次联立方程……………………………71
§5　方程与图象……………………………73
（1）坐标……………………………73

（2） 方程和图象 ……………………………………76
（3） 图象和方程的解 ……………………………79
方程的历史(其二) ……………………………………84

第四章　二次方程

§ 1　二次方程 ……………………………………85
（1） 二次方程 ……………………………………85
（2） 平方根 ……………………………………89
§ 2　二次方程解的公式 ……………………………92
（1） 二次方程的解法 ……………………………92
（2） 二次方程解的公式 …………………………96
§ 3　因式分解与二次方程 …………………………99
§ 4　二次方程和二次式的图象 ……………………103
（1） 二次式的图象 ……………………………103
（2） 二次方程的解和二次式的图象 ……………106

第五章　复数

§ 1　虚数 ……………………………………111
（1） 负数的平方根 ……………………………111
（2） 虚数 ……………………………………115
§ 2　复数 ……………………………………118
（1） 复数 ……………………………………118

（2）复数的运算……………………………………121
编者的话……………………………………125

第一章　谈谈集合

§1．事物的集体

（1）　集　　合

在星期日，朋友们到进君的家里来玩。有山本，田中，佐藤，渡边，井上等五人。都是进君的落合中学二年级A班的同学，大家在一起玩扑克。

在数学中，把具有某一特征的集体叫做**集合**。虽然所说的特征不易理解，但是玩扑克的六人集体，落合中学的二年A班的全体学生等都是集合。

图 1

如图1，把玩扑克的六人的集合，写成

{进，山本，田中，佐藤，渡边，井上}

就是使用中括号｛ ｝表示集合。

现在，如图2，在进君的手里拿着扑克牌，这个牌的集体也可写成集合：

｛方块3，黑桃4，黑桃10，梅花8，方块6｝。

属于集合的每一个个体叫做**元素**或**元**。山本，田中，佐藤等是玩扑克人集合的元素。

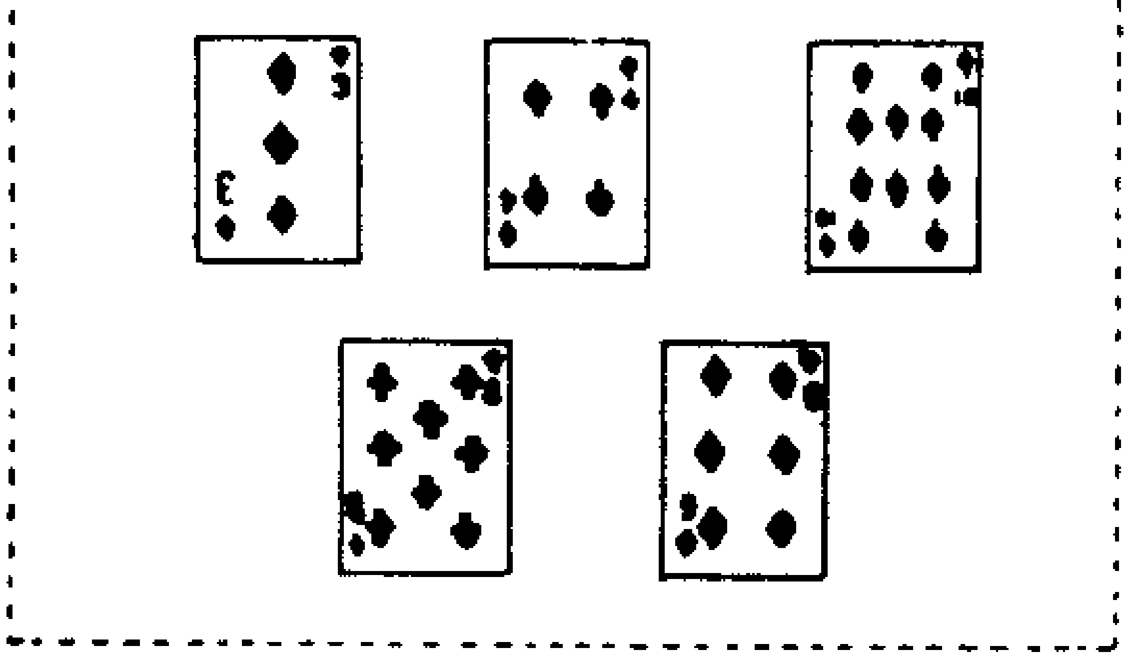


图 2

集合并不限于像人，扑克牌那样用眼睛可以看到的集体。例如，像1，2，3，4，……这样叫作自然数的数，10以下的全体自然数也是集合，可以把它表示为：

｛1，2，3，4，5，6，7，8，9，10｝

虽然在表示集合的｛ ｝中，把全体元素并列写出，这个集合很易于了解，但是当元素的个数很多的时候，要都写出来很麻烦，并且当集合的元素是无限个的时候将无法解决。于是要表示从1到10的自然数集合时，可以用x来代表集合的元素，用

$$\{ x \mid x \text{是不大于10的自然数} \}$$

的书写方法表示。如果写成$\{ x \mid \cdots\cdots \}$，则…………将就满足全体$x$的集合。

采用这种写法，二年级A班全体学生和全体自然数的集

合可写成

{ x | x 是二年A班的学生 }

{ x | x 是自然数 }

虽然所说的集合都是物体的集体，现在我们要考察一下物体的集体所具有的性质，能作出几个集合，他们之间存在什么关系。此时，把集合用图表示出来进行研究更容易理解（图3）。

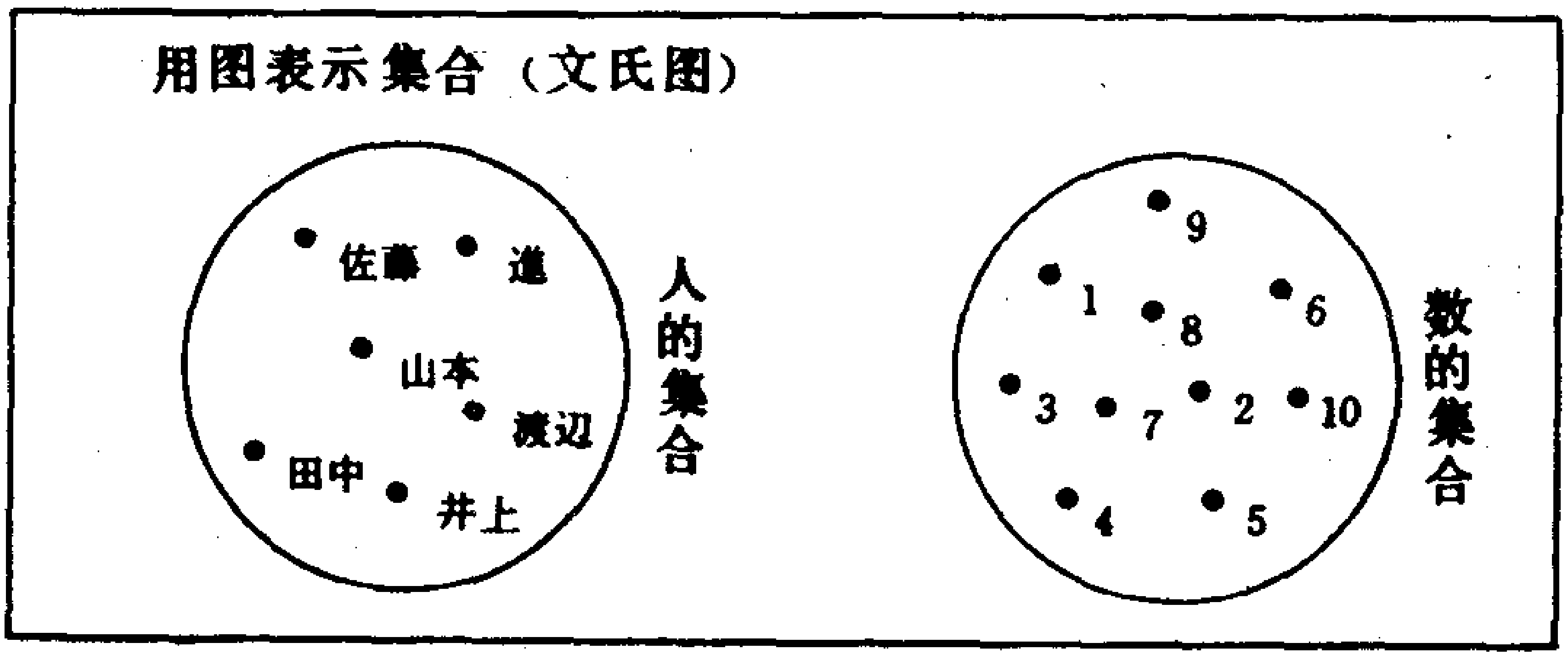


图 3

在把集合用图表示时，如图3那样，可以把它用圆形闭曲线表出，把它的元素用它内部的点表示。曲线的大小与元的个数无关，可以随便确定。

这样，集合用闭曲线表示时，把这个图叫做集合的文氏图。

虽然物体的集体叫做集合，但是如“二年级A班高身材的全体学生”或者“全体大的自然数”等，都不能叫集合。为什么这样说？因为高于多少cm的人，算作高身材是不明确

的，所以不能确定哪个人属于集合，哪个人不属于集合，所说的大的自然数，也是不明确的，不能确定多大的数是大的自然数（图4）。所说的集合必须确切地规定出包含在这个集体的元素，这是首先要明确的。

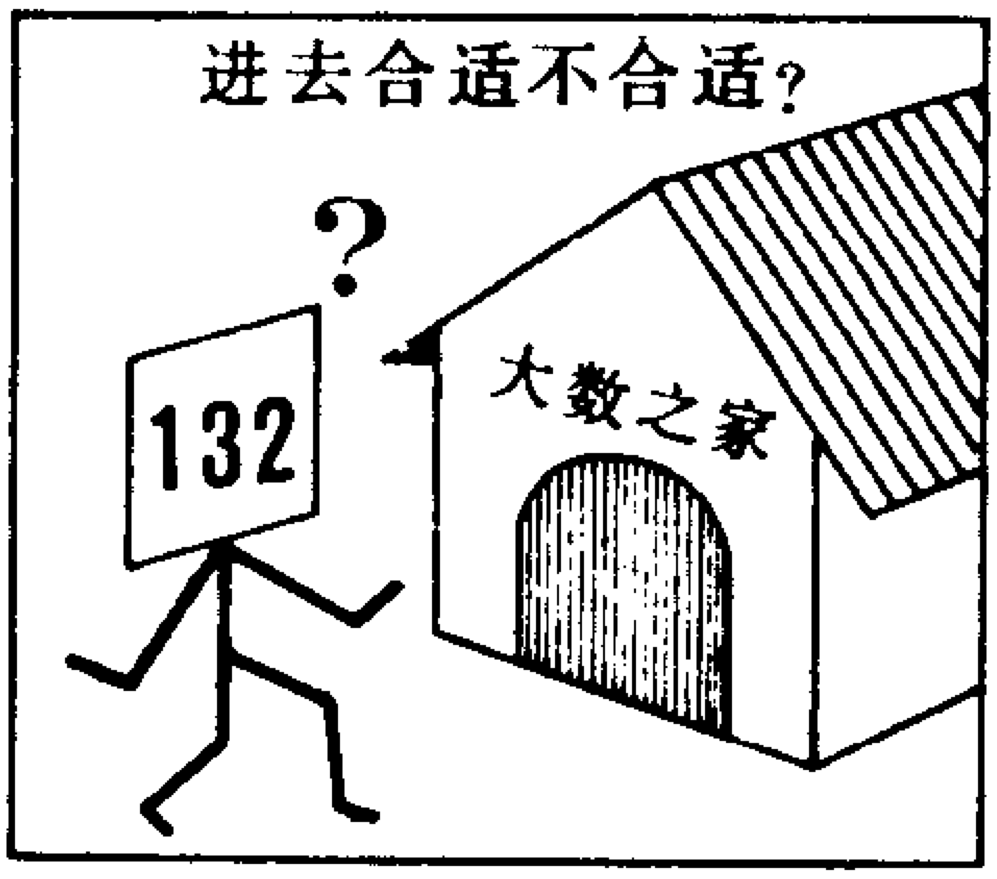


图 4

【想一想】 在1到10的自然数中，写出满足下述条件的集合的所有元素。

(1) 3的倍数 (2) 7以上的数 (3) 与7相近的数

【略 解】 (1) 3，6，9 (2) 7，8，9，10 (3) 不是集合

(2) 子集与全集

考虑从1到10的自然数集合

$\{x \mid x$ 是10以下的自然数$\}$

在这10个自然数中，只把偶数选出来可以得到集合$\{2, 4, 6, 8, 10\}$。把这个集合叫做A，可写作

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

研究一些集合的时候，通常用大写字母来表示集合。

象A那样，把10以下的自然数中4的倍数集合，6的倍数集合写作：

$$B = \{ 4, 8 \}$$

$$C = \{ 6 \}$$

C 是只有一个元素的集合。

现在看A，B，C 三个集合的元素，B 的元素4，8 两个都是集合A的元素，C 的元素 6 也是A 的元素。这样，在两个集合A 和B 中，集合B 的元素全部是集合A 的元素时，由于B 是A 的一部分，B 叫做A 的**子集**。这时，也可以说B被A 所包含，或A 包含B。

B 是A 的子集时，使用符号⊃，写成

$$A \supset B \quad (\text{或} B \subset A)$$

在上例中，C 也是A 的子集。

前面玩扑克的六人集合，

{进，山本，田中，佐藤，渡边，井山}

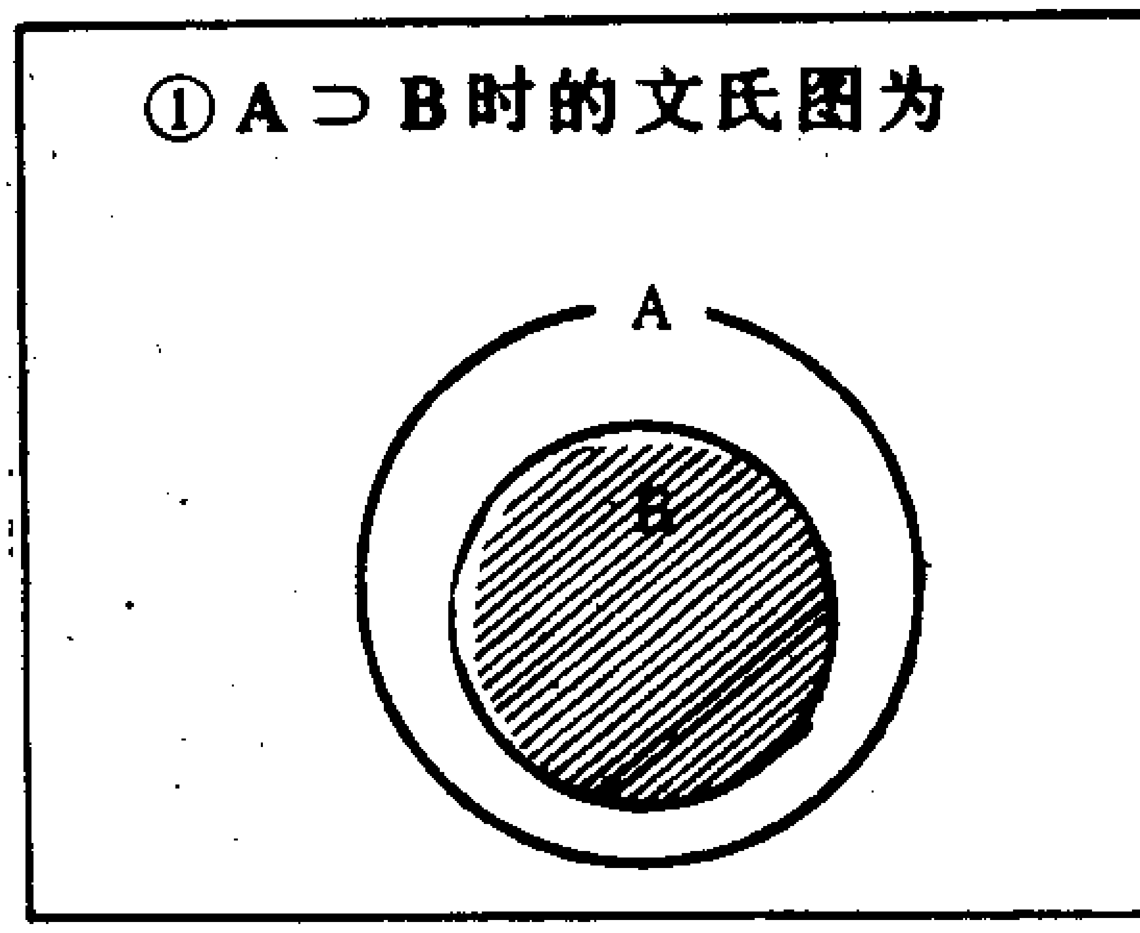
是二年A 班全体学生集合的子集。并且，二年A 班学生的集合是落合中学全体学生集合的子集，可以写成

{ x | x 是落合中学的学生}⊃{ x | x 是二年A 班学生}⊃{进，山本，田中，佐藤，渡边，井上}。

集合B 是集合A 的子集时，把A，B 两个集合写成文氏图，将是什么样子呢?

B 成为A 的子集这一事实是B 的元素都是A 的元素。所以，表示B 的曲线可以画在表示A 的曲线的内部（图5 的①)。

把落合中学学生的集合画成文氏图，则为图5 的②。



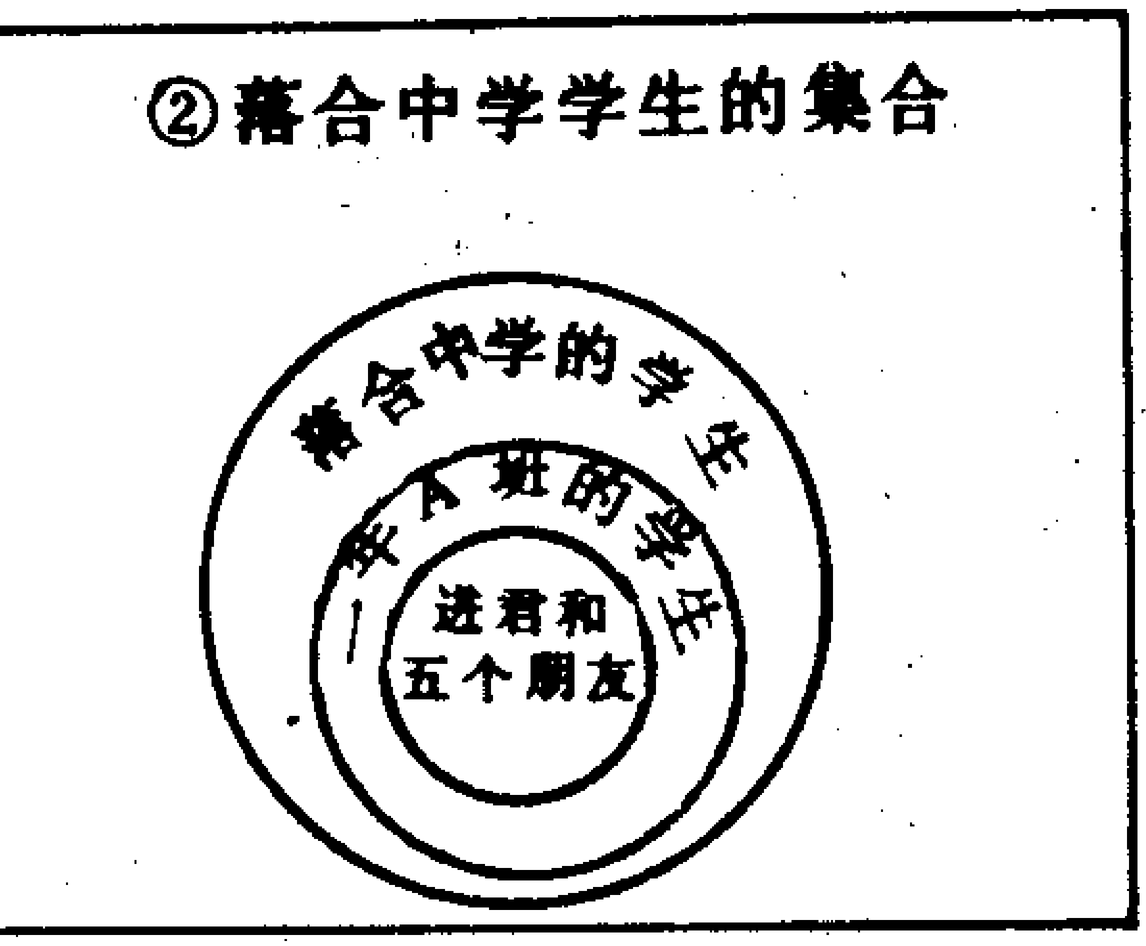


图5

一起讨论几个集合时，通常要考虑全集。例如，A，B，C，D四个集合一起讨论时，像图6那样确定一个把它们都包含进去的集合，在这里面研究集合的性质以及集合之间的关系。

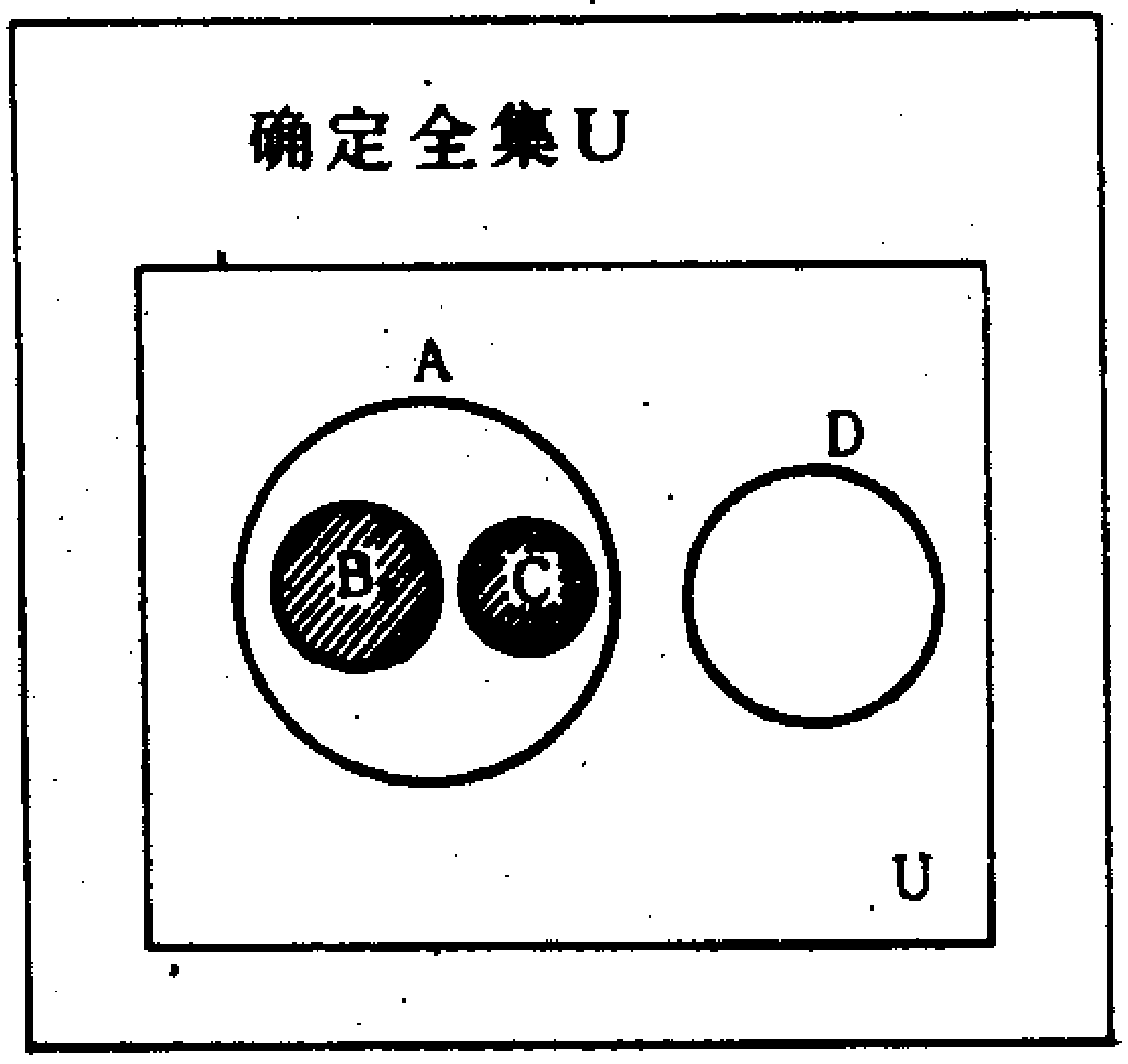


图6

这样，确定的包含所研究的集合的集合叫做全集，以字母U来表示。并且，如果画出文氏图时，多半以长方形表示。

在第9页中作出A，B，C集合时，实际上，把10以下的自然数集合认为是全集。于是，把A，B，C作为它的子集作出。

规定全集的方法，应根据使研究集合怎样最合适，按当时情况来确定即可。例如，考虑扑克牌的集合，把全体扑克

牌的集合作为全集。此外研究数的集合时，最好是确定出最合适的数的范围作为全集。

集合A 是全集U的子集时，把所有是U的元素但不是A 的元素构成的集合，叫做A 的余集，记作$\overline{A}$。

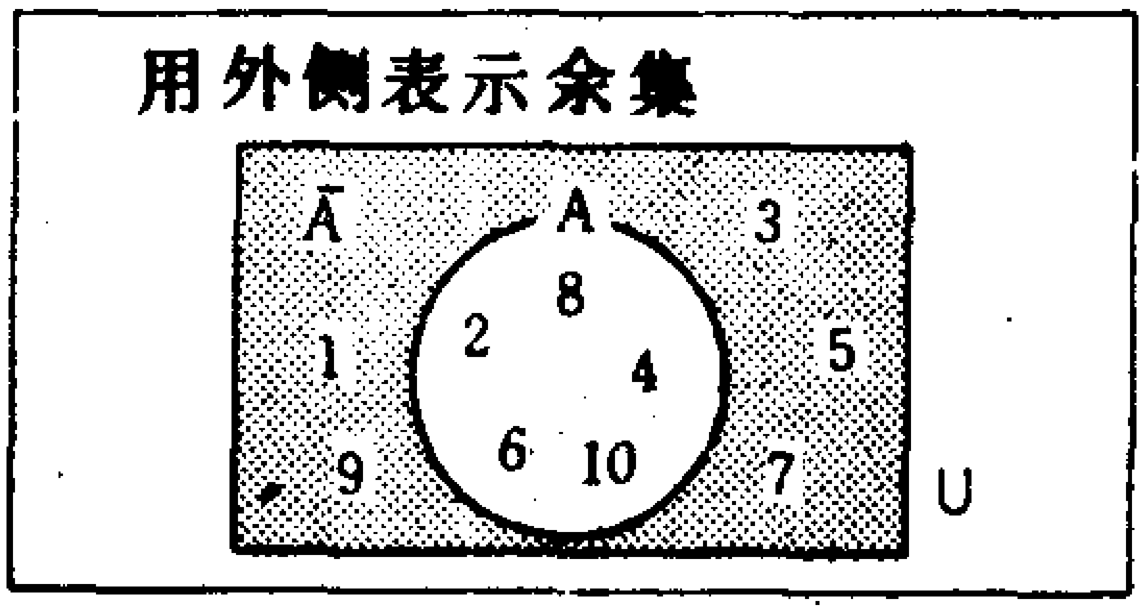


图7

U为10以下的自然数集合，A＝{2，4，6，8，10}时，则$\overline{A}$＝{1，3，5，7，9}。

在文氏图上，$\overline{A}$是图7 中涂黑色的部分，用表示A 的曲线的外侧部分来表示。

【想一想】 在扑克牌里，把U＝{x |x 是红桃和梅花牌}作为全集，A＝{x |x 是红桃牌}，B＝{x |x是红桃5以下的牌}，C＝{x |x是5以下的牌}。(1) 用{x|……}形式答出A的余集。(2)哪些是A的子集？

【略　解】 (1) {x |x 是梅花牌}　(2) B

§2. 并集和交集

(1) “或”和“与”

在进君的学校里，对所有学生的家庭作了一次调查。班主任老师说:「有弟弟或妹妹的人把手举起来。」的时候，因为

进君既有弟弟又有妹妹，开始迟疑了一下，然后把手举起来了。

通常使用“**或**”这个词的时候，它的意思是非常不明确的。例如

「 此次旅行去镰仓或箱根。」

说这话的时候并没想去镰仓和箱根两个地方，一般来说只去其中的一个地方。按照这种想法，有弟弟和妹妹两者的进君就不能举手了。

按有弟弟和妹妹或者没有划分班里的学生时，

（a） 既有弟弟又有妹妹的人的集合

（b） 有弟弟但是没有妹妹的人的集合

（c） 没有弟弟但是有妹妹的人的集合

（d） 弟弟妹妹都没有的人的集合

可以分成四个集合，无论谁都属于这四个集合之一（图8）。

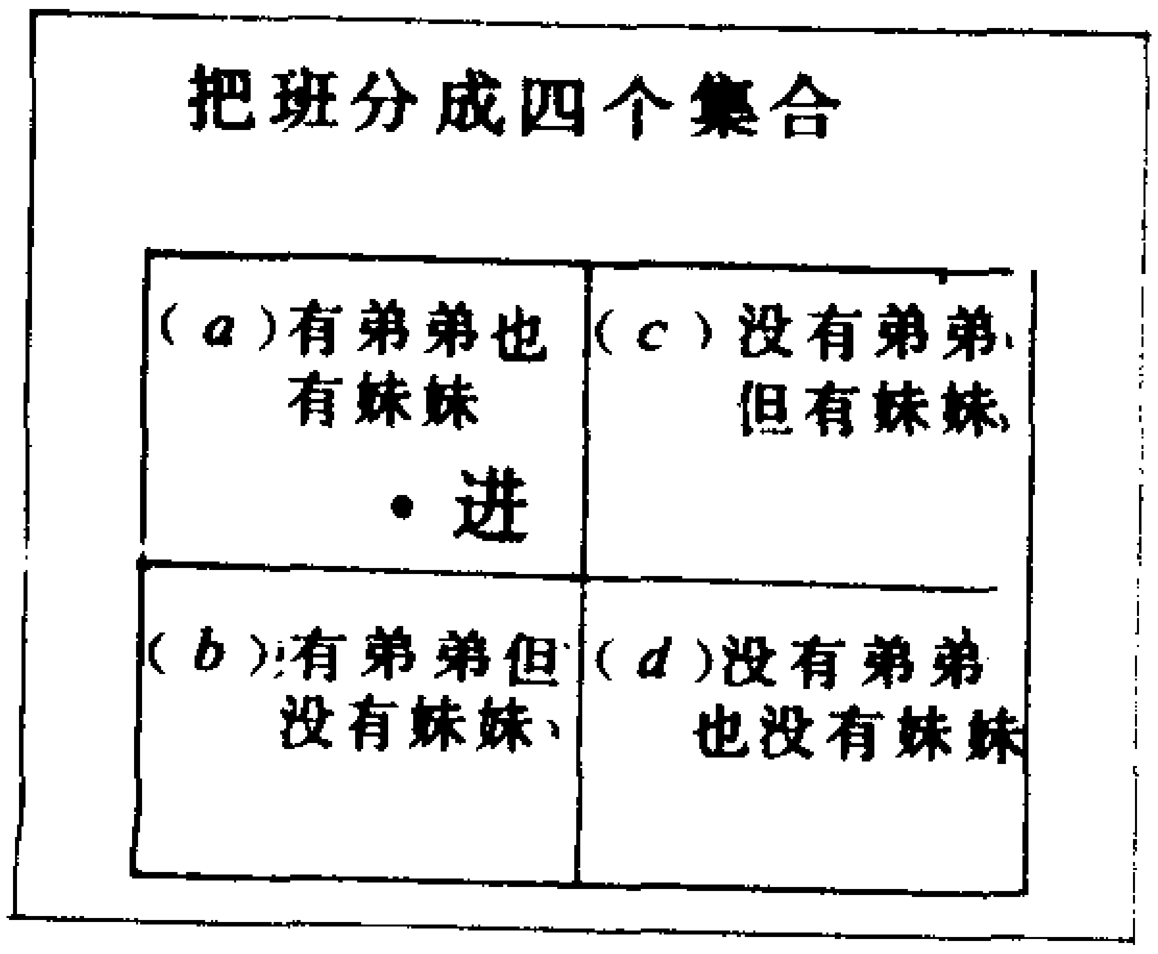


图8

在日常交谈中，“或”这个词的含意不明确并不太重要，但是在数学上要把“或”这个词的含意作如下的明确规定。

所谓“p 或 q ”是指 **p，q 当中至少有一个成立**。更明确地说，可以是仅仅 p 成

立，可以是仅仅q成立，也可以是p，q都成立。

因而，所说的“有弟弟或有妹妹”是指属于前页的（a），（b），（c）三种集合之一的情形。在那里，由于进君是属于（a）的，所以他把手举起来在数学上是正确的。

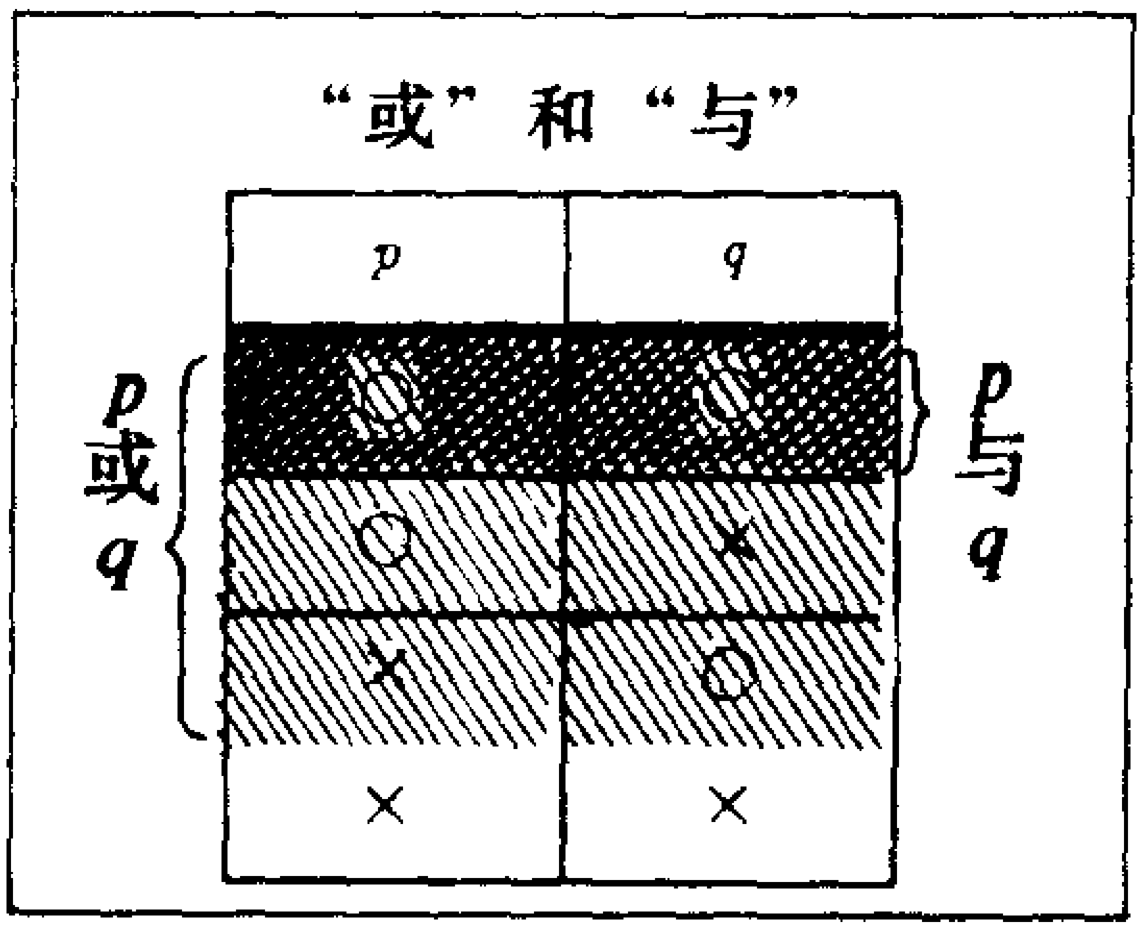


图9

像进君那样弟弟妹妹都有的情况，在日语中有:“有弟弟和妹妹”，“有弟弟并且也有妹妹”等各种说法。

像这样的情况，在数学上说成

“有弟弟与妹妹”

使用“与”这个词来表示。

通常说

“p 与 q”

是规定为**p 与q两者同时成立**的意思（图9）。

在前面，在第8页和第12页已经解释了文氏图，在这里对文氏图的书写方法稍加研究。

有二集合A，B时，它们的关系是:

（a） A 被B 包含（A ⊂ B）。

（b） A 和B 的元素完全相同。

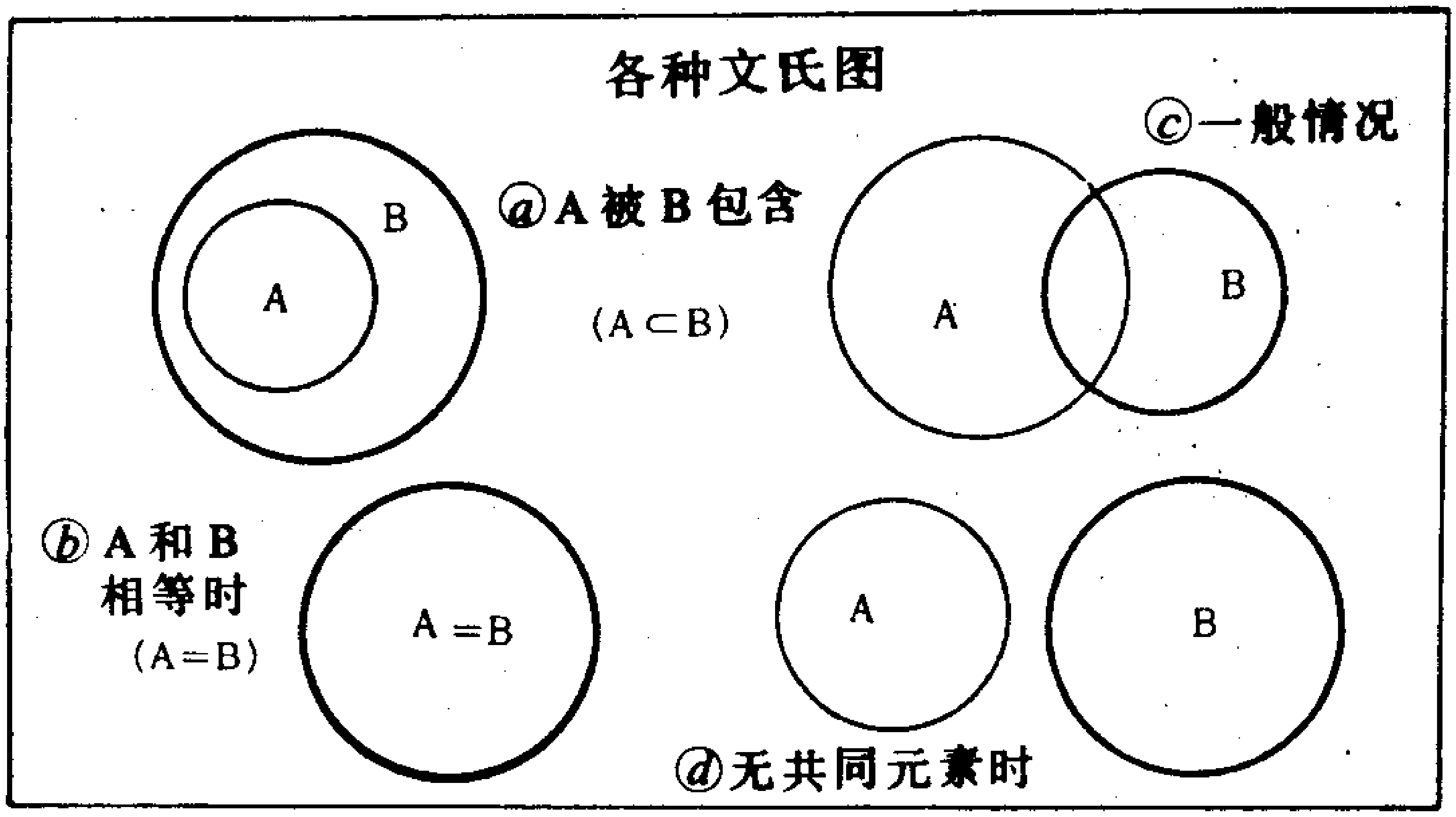


图10

（c） A 和B 两者虽有相同元素，但不是（a）,（b）情况。

（d） A 和B 没有一个相同的元素。

这样的各种情况，它们的文氏图，也都各有不同。

例如，取进君的班级，二年A 班全体学生的集合

$$U = \{x \mid x\text{是二年A班的学生}\}$$

作为全集，在其中考虑集合

$$A = \{x \mid x\text{是有弟弟的学生}\}$$

$$B = \{x \mid x\text{是有妹妹的学生}\}$$

此时；由于既有弟弟又有妹妹的进君属于A，B 两者，这种情况的文氏图正是图10的（c）。于是能把图10那样的（c）的文氏图画出来，则在第13页研究过的（a）（b）（c）（d）的四个集合，就能全部表示出来了。

【想一想】 按下表指出，（1）国语在70分以上，且数

学也在70分以上，（2）国语或数学在60分以下，都是哪些人？

	進	山本	田中	佐藤	渡边	井上
国語	67	83	55	73	91	62
数学	76	58	59	82	73	52

【略　解】（1）佐藤，渡边　（2）山本，田中，井上

（2）　并集和交集

在第9页考虑的，把

$$U = \{x \mid x\text{是10以下的自然数}\}$$

取作全集，来研究其中的两个集合：

$$A = \{x \mid x\text{是2的倍数}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{x \mid x\text{是3的倍数}\} = \{3, 6, 9\}$$

此时，把属于集合A和集合B的元素全部合在一起为

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

得到一个新的集合。

把这个集合叫做A与B的**并集**（**或和**），采用记号∪，记为$A \cup B$，

即　$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

两个集合A，B的并集是由属于A，B的所有元素构成的集合，可是也可以说，是由至少属于A，B一方的元素合

起来而构成的集合。可是至少属于A，B 一方这一事实，与第14页所说的属于A 或者B 是相同的。

于是可以说

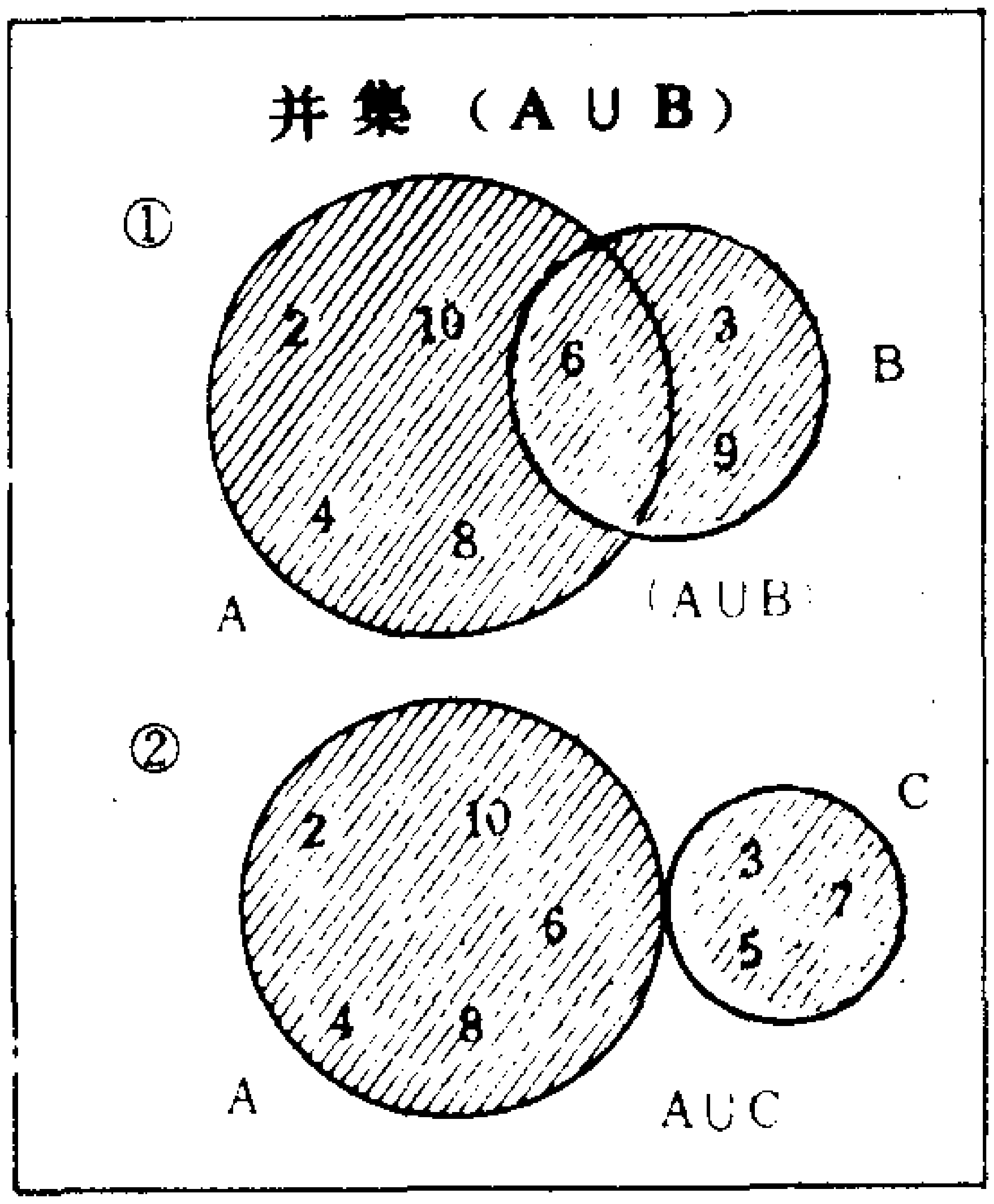


图11

A，B 的并集是属于A或者属于B 的所有元素的集合。

在17页开头所举的例子可以写成

A∪B＝{ x | x 是2或者是3的倍数 }

画出A，B 两个集合的文氏图，它的并集是图11①的涂成红色的部分。

现在讨论新的集合

C ＝{ 3， 5， 7 }

因为A 与C 无相同元素，文氏图是图11中②的两个相离的圆，A 与C 的并集仍为红色部分。

因此，不论两个集合有什么关系，它的并集的文氏图都是二曲线内的全部。

其次，在第17页把同时属于A，B 两者的元素全体作出的集合，由于这样的元素只有6，得到集合

{ 6 }

把这个集合叫做A，B的**交集**（或者共同部分），使用记号∩，记为

$$A \cap B = \{6\}$$

由于A，B二集合的交集是由属于A，B两者的元素构成的集合，也可以说

A，B的交集是属于A且属于B的全体元素的集合。

所以，这个例子也可用“与”这个词来说明，

即 $A \cap B = \{x \mid x$是2的倍数与3的倍数$\}$

把这两个集合画成文氏图，A，B的交集为图12中由二曲线相重的红色部分。

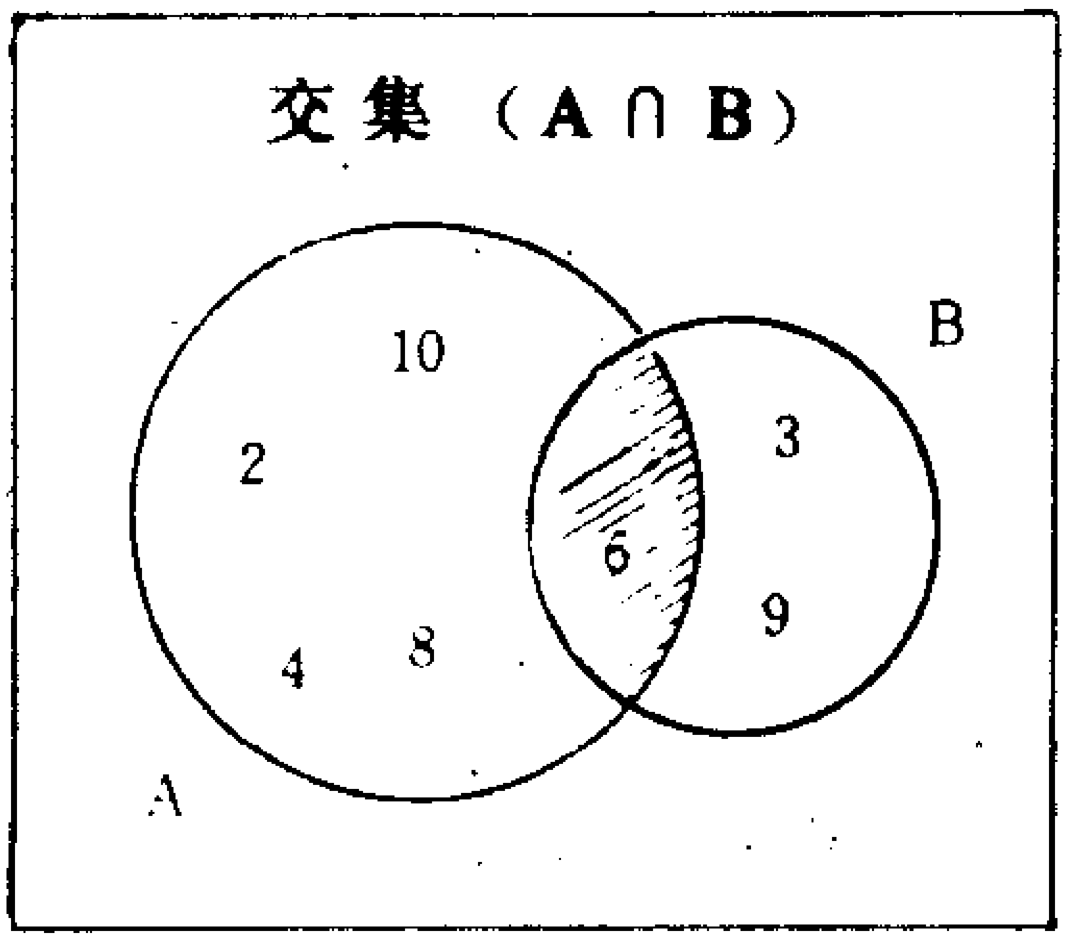


图12

那么，考虑第18页中的集合C和A的交集。

C和A的交集是

$$A \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{3, 5, 7\}$$

因为没有同时属于这两个集合的元素，所以它的文氏图像图13那样，是相离的圆。

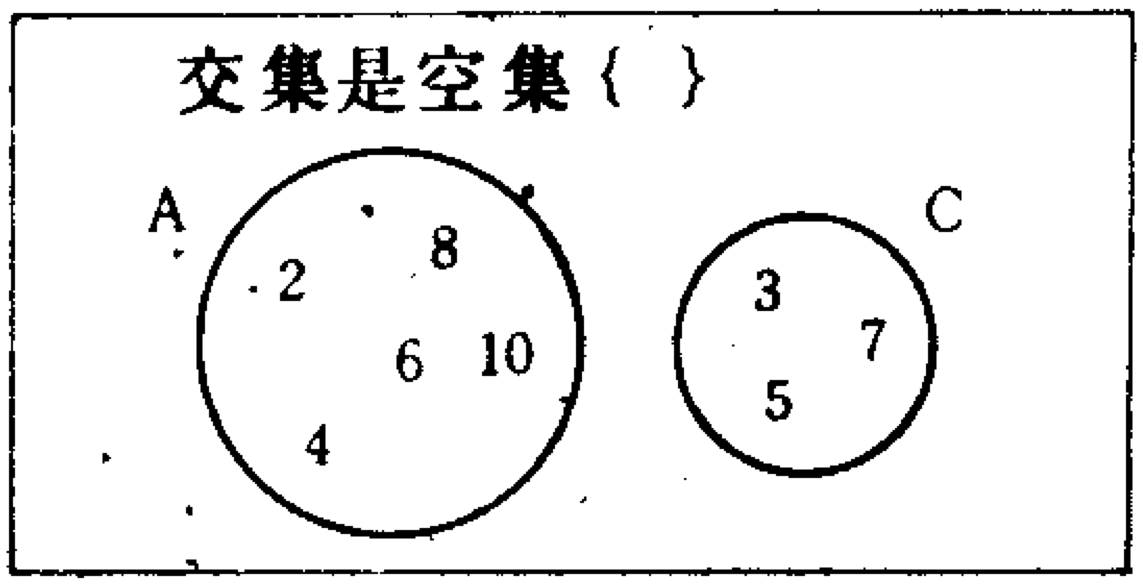


图13

然而，像这种没有共同元素的情况，要使回答交集成为可能，就要考虑连一个元素也

没有的集合。把这个集合叫做空集，以ϕ 或$\{\ \}$这样的记号来表示。

这样一来，A，C 的交集，也可写作

$$A \cap C = \phi$$

规定空集是任何集合的子集，此外，空集的余集为全集。

【想一想】 如$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$为全集，

$A = \{a, b, c, d, e\}$， $B = \{a, c, e, g\}$ 回答

(1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$ (3) $\overline{A} \cap B$ (4) $\overline{A} \cap \overline{B}$

都是什么样的集合？

【略　解】 (1) $\{a, c, e\}$ (2) $\{a, b, c, d, e, g\}$

(3) $\{g\}$ (4) $\{f, h\}$

§3. 点的集合

(1) 点和直线

研究图形性质时，时常在直线上和平面上取一些点进行考虑。此外，把集合用文氏图表示时，是用平面上的点来表示它的元素的。

在直线和圆等图形上，可以取很多点。反之，这些图形也可看作是由无限多的点构成的。另外，平面也是无限多的

点构成的。

这样考虑时，则直线，圆以及平面等都是由一个一个的点作为它的元素的集合（图14的①）。

这样，由点聚集起来而形成的集合叫做**点集**。直线，圆，平面等都是点集。

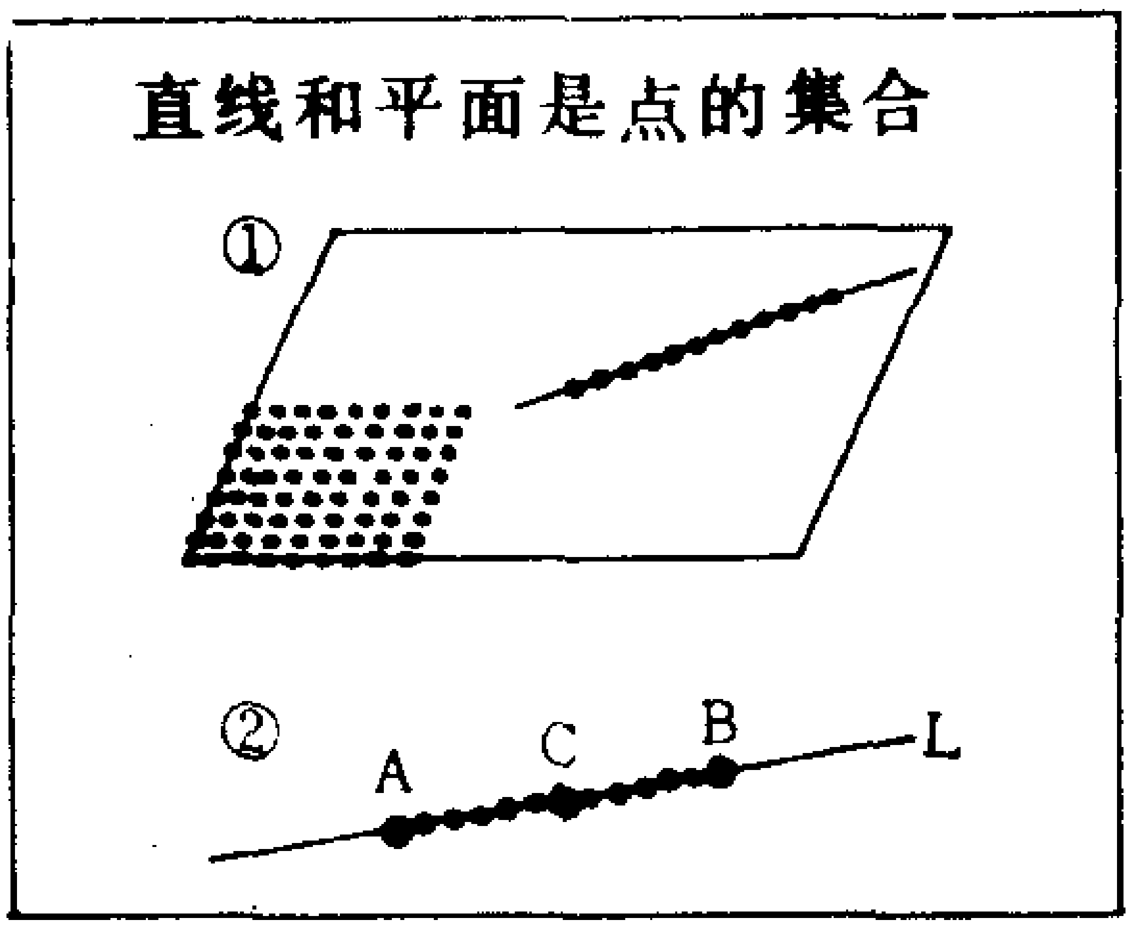


图14

现在把一条直线写作L 时，则L 是一个点集。因为无论在L 上的哪个地方都能取点，如在两点A，B 之间取点C，A 和C，C 和B 之间还可以取点。这样，在两点之间依次反复地连续取点（图14的②），L 上任何短的一个线段中都能取无限多个点。所以直线是由无限多个点紧挨着没有空隙的一串点的集合。

把直线看成点集时，可以研究它所具有的性质。

如图15，在向着左右伸延的直线上取点P。这样做，点P 能把直线L 分成三个子集：

L_1＝｛x |x是P 左侧的点｝

L_2＝｛ P ｝

L_3＝｛x |x是P 右侧的点｝

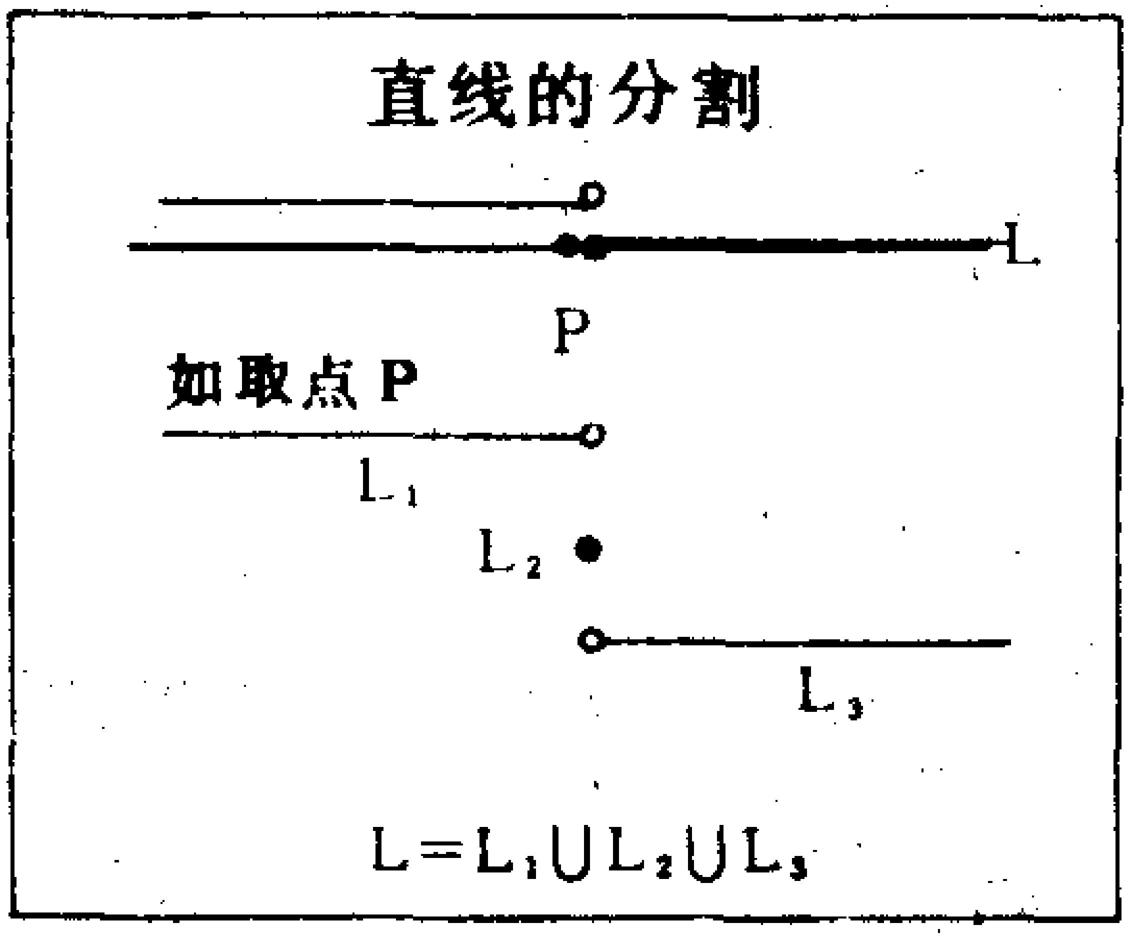


图15

而且L_1，L_2，L_3之间没有共同元素，

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3.$$

这样，在直线上取一点，通过这点直线被分成三个子集，这一事实是直线的重要性质。

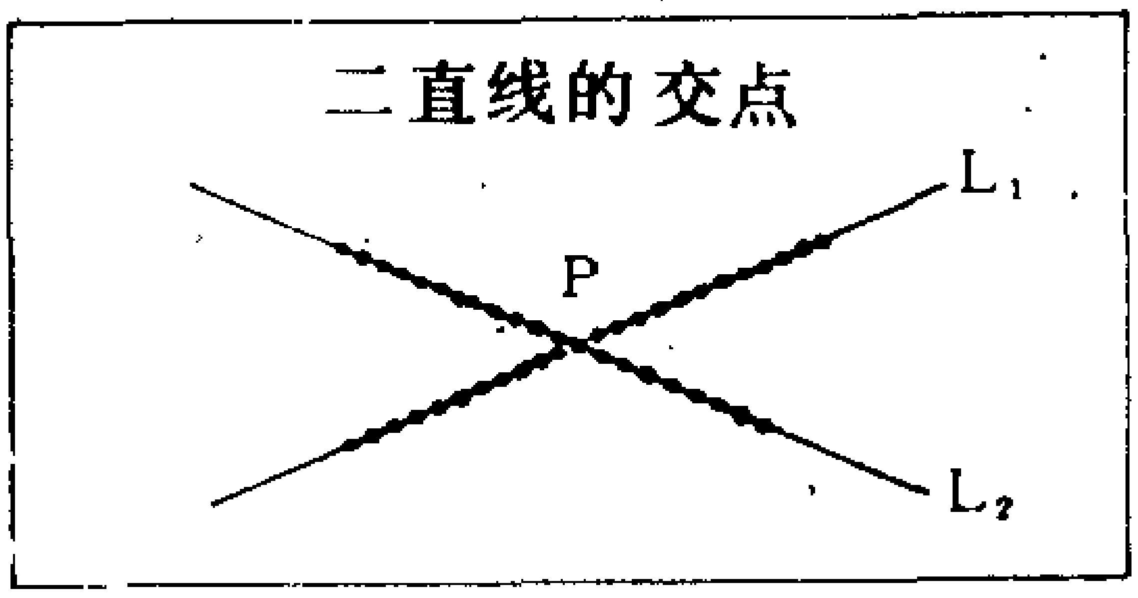


图16

其次，平面内的两条直线或者平行或者交于一点。二直线L_1，L_2相交时，设它的交点为P。如此，像图16那样，因为P在L_1上，是集合L_1的元素。另外，又因为P点在L_2上，是集合L_2的元素。因此，把仅有元素P的集合写作P，考虑集合$P = \{P\}$时，则P含于L_1与L_2的交集中。可是，因为点P以外再没有同时属于L_1和L_2两者的点，所以P是L_1与L_2的交集

$$P = L_1 \cap L_2$$

此外，因为集合L_1与L_2的并集$L_1 \cup L_2$是L_1及L_2的全部元素集聚而成的集合，所以表示为直线L_1，L_2。

这样，既使不是直线，把两个图形看成点集时，这两个图形相交的点，可用二集合的交集表示。

还有，两个完全重合的图形，也可以用二集合的并集表示。

【想一想】 在向左右伸延的直线上，有A，B二点，设A在B的左边。$L = \{x \mid x$是由A向右的点$\}$，

$M=\{x \mid x$是由B向左的点$\}$时，$A\cap B$，$A\cup B$是什么?

【略 解】 $A\cap B$为AB线段（除掉端点的），$A\cup B$为直线全部。

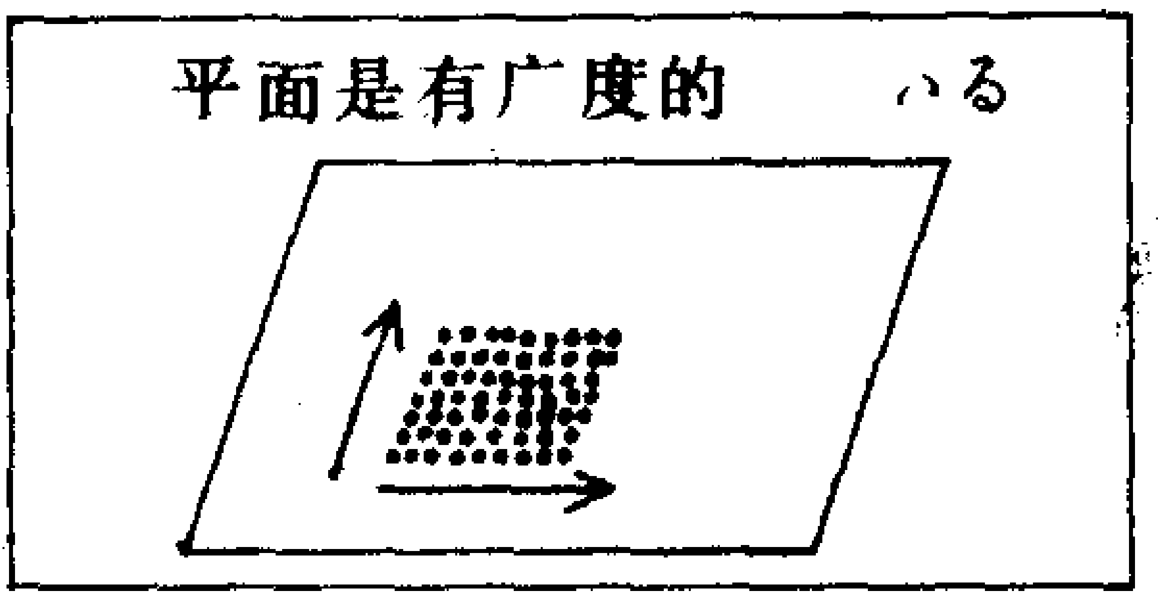


图17

（2） 直线和平面

平面也和直线一样，是无限个紧挨着的密集的点的集合。但是平面与直线有区别，不仅有长度而且有广度（图17）。

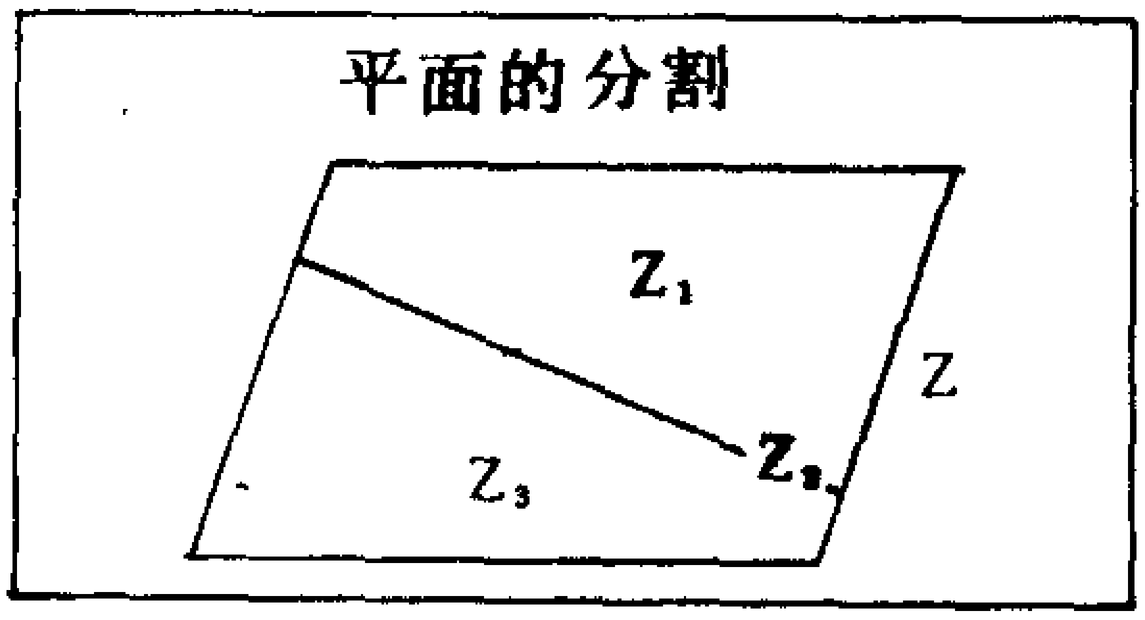


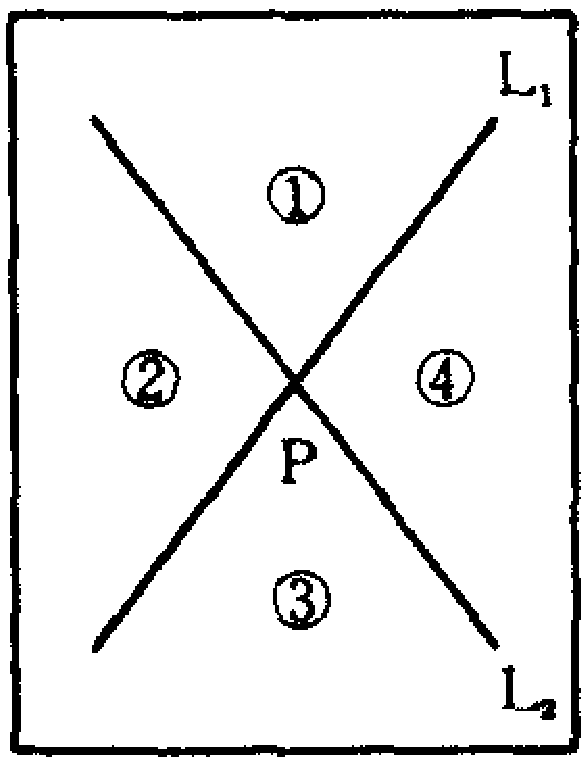
图18

以Z表示平面，如在Z内有直线L，则L为Z的子集。像图18那样，在平面Z内有直线L时，则由L把平面分为三个无公共元素的子集：

$Z_1=\{x \mid x$是在L上边部分的点$\}$

$Z_2=\{x \mid x$是在L上的点$\}$

$Z_3=\{x \mid x$是在L的下边部分的点$\}$



【想一想】 如图，二直线L_1，L_2相交时，设$Z_1=\{x \mid x$是在L_1上边部分的点$\}$，$Z_2=\{x \mid x$是在L_2上边部分的点$\}$时，$Z_1\cap Z_2$，$Z_1\cup Z_2$是①，②，③，④的哪一部分?

【略 解】 $Z_1\cap Z_2$是①，$Z_1\cup Z_2$是①，②，④

第二章　数与方程

§1．数集与数轴

（1）　整数与有理数

进君到现在为止，在学校学过的数有，整数，分数，小数以及负数。

所说的整数是

1，2，−6，13，0，−2561，436

这样的数，分数，小数是

$$\frac{3}{4},\ \frac{17}{15},\ -\frac{1}{6},\quad 3\frac{1}{12},\ -\frac{932}{3421},\ 436\ ,\quad 0.3,\ -0.28$$

$$3.1415\cdots\cdots,\quad -0.96\ ,\quad 0.3333\cdots\cdots$$

这样的数。

对于数可以进行加法，减法，乘法，除法四种运算，

$$12\times 5+7\div 3$$

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}-\frac{14}{3}\times\frac{13}{5}$$

$$0.75\times(4.13+12.73)-3.14$$

上面运算，你们都能得出答案。

然而，分数，小数，整数这些数是不同的数吗？

把一个苹果四等分后去吃时，一个人吃的数量可以用分数$\frac{1}{4}$表示，但是也可以用小数0.25来表示。因而

$$\frac{1}{4}=0.25$$

另外，分数$\frac{1}{4}$也能用分数$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{16}$，这样的分数表示，

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\cdots\cdots$$

都表示相同的大小。

此外，每一个人吃$\frac{1}{4}$，六个人吃$\frac{1}{4}\times 6=\frac{3}{2}$，八个人则吃$\frac{1}{4}\times 8=\frac{8}{4}=2$。因为通过$\frac{8}{4}=2$，得知

$$1=\frac{2}{2}=\frac{1}{1},\ 2=\frac{4}{2}=\frac{8}{4},$$

$-5=\frac{-5}{1}=\frac{-15}{3}$这样的整数能用分

有理数是什么数？

$\frac{3}{4}$，$\frac{17}{15}$，$-\frac{1}{6}$，$-\frac{528}{342}$

$3\frac{1}{2}$，……………………

7（$=\frac{7}{1}$）－4（$=-\frac{4}{1}$）0

…………

0.25（$=\frac{1}{4}$）0.333…（$=\frac{1}{3}$）

…………

图 1

子被分母整除的分数形式表示。

此外，小数中也有

$$0.25=\frac{1}{4},\qquad 1.4=\frac{7}{5},\qquad 0.333\cdots\cdots=\frac{1}{6}$$

这样的能用分数表示的。

不仅分数，包括整数和小数在内，能表成分数形式的数，叫做**有理数**（图1）。

另外，在小数的计算中，也有

$3.26+1.56=4.82$，　$3.26+1.56+2.18=7.00=7$

$7.00=7$，像这种小数点以后都是0的数是整数。于是也可以把整数看成小数的特殊情况，能表成整数和小数形式的数叫做**实数**（图2）。

实数　实数是什么数？

0.3, −0.28, 1.27, −4.7

1.666……, 0 12475, 972……,

3.14159……, 1.4142……,

13, −529, 0, ……………

$\frac{2}{5}(=0.4)$, $\frac{1}{6}(=0.166\cdots\cdots)$

图 2

因为在第一章已经学过集合，对于数也使用集合来研究。

首先，把全体整数集合写作

$$I=\{x\mid x\text{是整数}\}=\{1,\ 2,\ -13,\ 0\ \text{等等}\}$$

全体有理数的集合写作

$$K=\{x\mid x\text{是有理数}\}=\{\frac{3}{4},\ -\frac{1}{6},\ 2,\ 0.25,$$

0 等等｝实数集合为

$$R=\{x \mid x\text{是实数}\}=\{0.25,\ 2,\ 3.1415\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{1}{6}\text{等等}\}$$

这样一来，从过去已说明的事实中知道，I 是K 和R 两个集合的子集。

即

$$I\subset K,\qquad I\subset R$$

即K 和R 两都含有整数集 I 。

那么有理数集K 和实数集R 的关系又怎样呢？

为了研究这个问题，只要我们回想一下，如

$$\frac{7}{4}=1.75,$$

$$-\frac{1}{6}=-0.1666\cdots\cdots$$

这样的任何分数都可以将分子除以分母后改写成小数。这是因为任何分数都能用小数表示，即有理数集的元素都能用实数集的元素表示（图 3 ）。

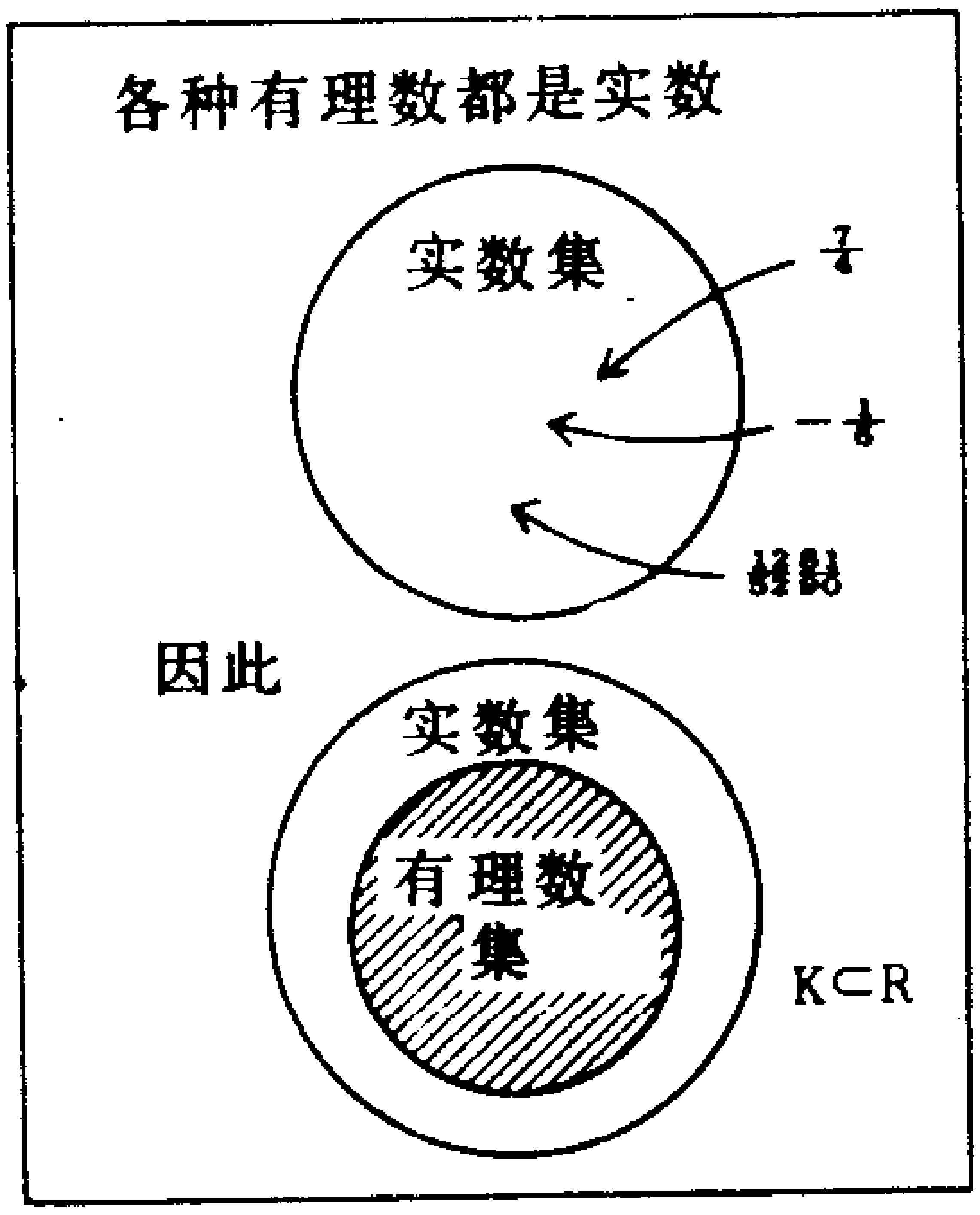


图 3

换句话说，集合K 的元

素都属于集合R，即K 为R 的子集。

$$K \subset R$$

因为把$\frac{1}{6}$化成小数时，得0.1666……永远除不尽，6 无限地继续下去。所以认为$\frac{1}{6}$不能化为小数，这样看就错了。在小数中有有限小数和无限小数，因为$\frac{1}{6}$是和所说的无限小数0.1666……是相等的。

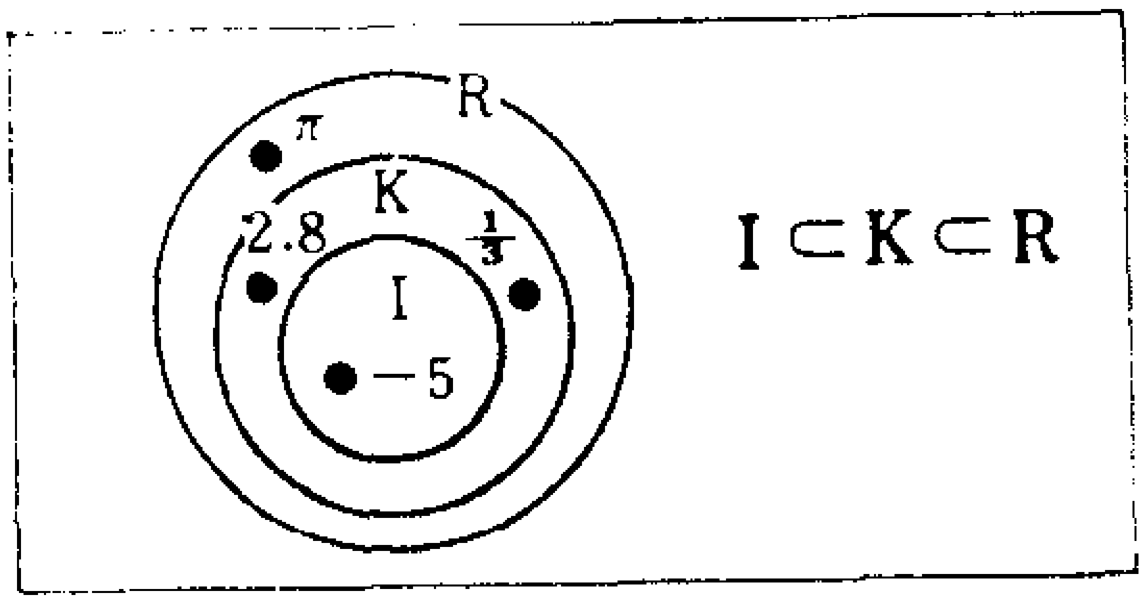


图 4

总结过去说过的，整数集I，有理数集K，实数集R 之间存在

$$I \subset K \subset R$$

的关系，K 为R 的子集。

相反地，是否可以说R 的元素都属于K？首先以圆周率3.1415……而论，可知虽能表示成小数但不能表示成分数的数为无理数，所以上面说的事是不可能的（图4）。

关于这些数的问题在后面还要说明。

【想一想】 1. 把下面的分数化成小数。

（1）$\frac{3}{4}$ （2）$\frac{17}{15}$ （3）$-\frac{1}{7}$

2. 从下面的数里选出属于I，K，R 的数。

（1）$\frac{1}{2}$　（2）-3.1　（3）4.0　（4）2.666……

（5）圆周率3.1415……

【略　解】　1（1）0.75（2）1.1333…（3）-0.14285714…

2属于I，K，R的，分别为（3），（1）～（4），（1）～（5）

（2）　数　轴

实数全体是无限个数的集合。而在第一章§3（参看21页）中，直线也可以看成无限个点的集合。

因此要考虑把数用直线上的点来表示。首先，在一条向左右伸延的直线上，按等间隔取点。

像图5那样，确定其中一个为表示0的点后，规定它右侧的点，顺次地表示为1，2，3，……，左侧为表示-1，-2，-3，………的点。因为点无论在左边和右边都是按等间隔，取多少都可以，所以仅仅这些点就能表示全体整数。

其次，用把1的长度2等分后所得长度，从0等间隔地取点时，这些都是可以用分母是2的分数表示。同理，把1的长度3等分，4等分，5等分，……，使用这些长度按等间隔取点时，这些点都分别地可用分母是3，4，5，……的分数来表示。

图 6 所取出的是分母为 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 5 所表示的分数的点，这样继续下去，用把 1 的长度52等分，314等分……等等，这样更短的长度去取点时，那么无论什么样的分数，

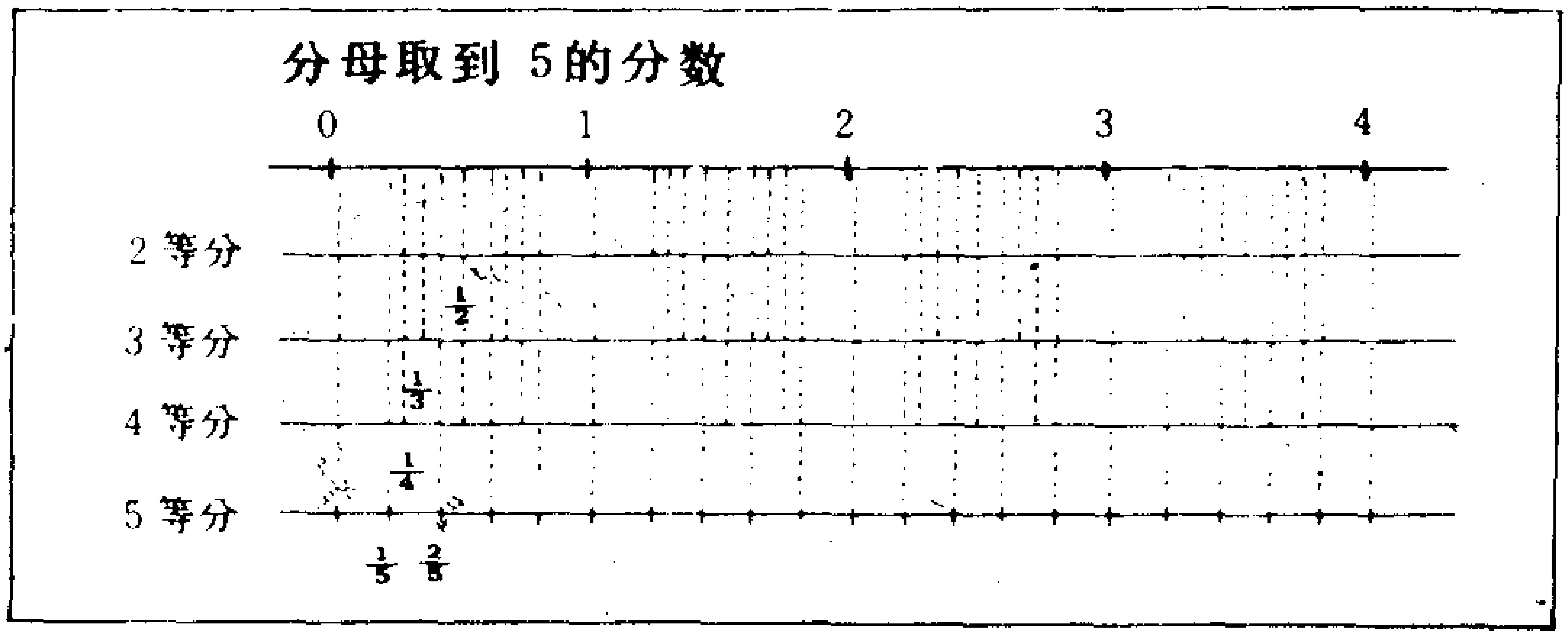


图6

在直线上都可取出表示它的点。

我们说过用分数表示出的数叫做有理数，关于表示有理数的点的排列方法，有下述的重要性质成立。

设表示二有理数的点*A*，*B*，不管 *AB* 的长度怎样短，在*A*，*B*之间表示有理数的点有无限多个。

这个性质叫做**稠密性**。因此说，有理数集是稠密的。

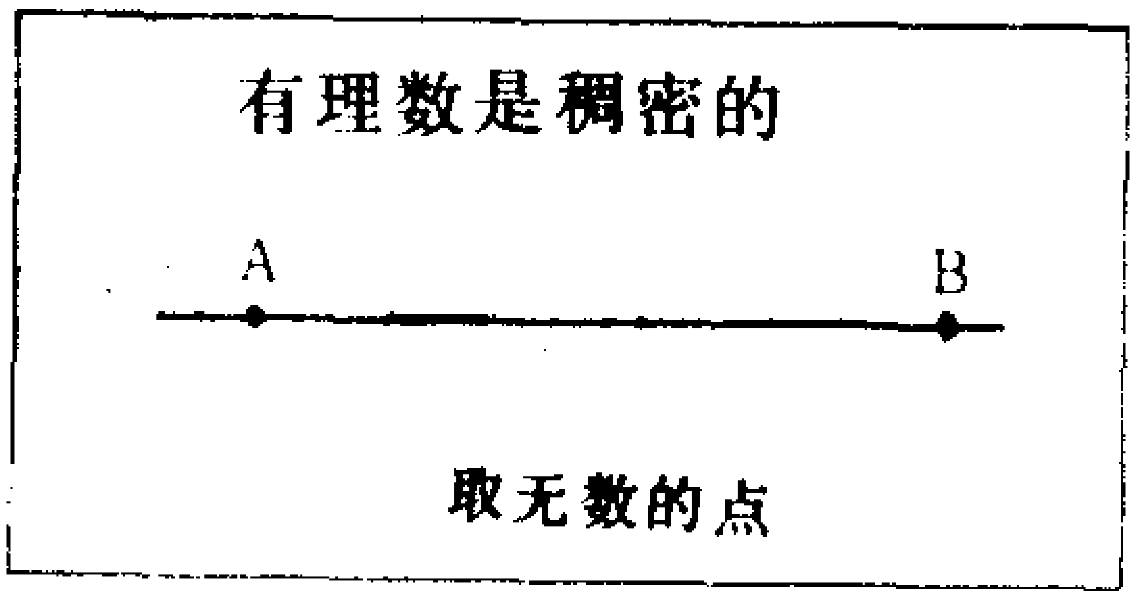


图7

与其说在A，B之间，可以取出无限多个表示有理数的点，不如说在A，B之

间能取出一个表示有理数的点更好。

为什么这样说呢？如图7，因为如果在A，B之间，能取得表示有理数的点C，而在A和C，C和B之间也还可能取得表示有理数的点。设它们为D和E，还可以在A和D，D和C，C和E，E和B之间取出表示有理数的点。

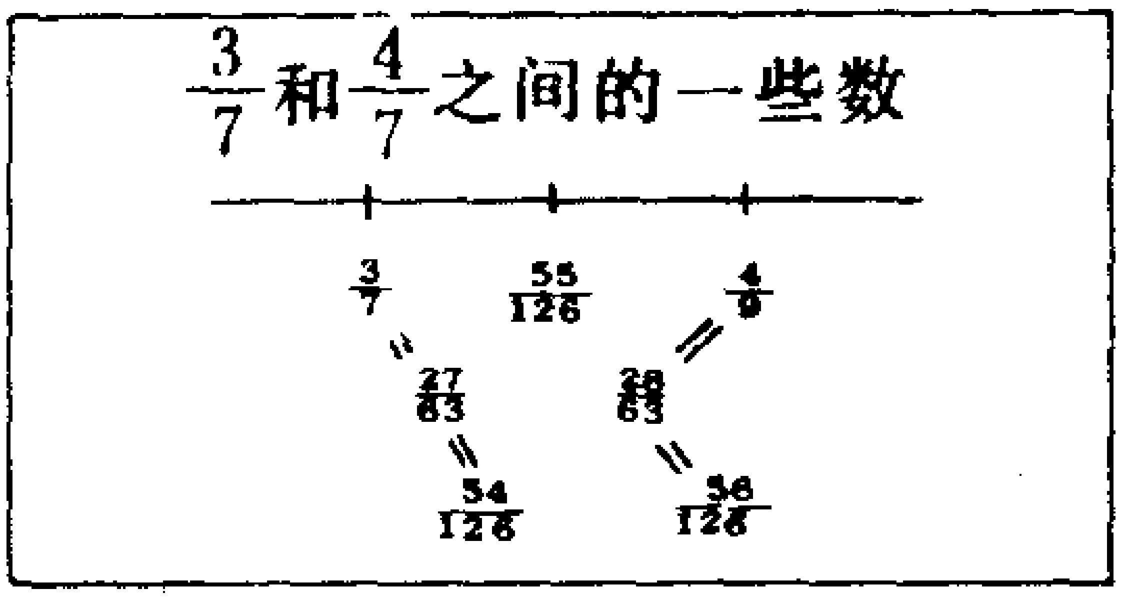


图8

实际上，在$\frac{3}{7}$和$\frac{4}{9}$之间真正存在有理数吗？这是像图8那样，如果把分母通分，可知$\frac{55}{126}$这个数显然就在它们中间。

在此以前，研究了在直线上取表示分数的点的方法。在表示小数的方面，可以把1的长度10等分，100等分……，就能取出表示到小数第一位，第二位，……的点（图9）。

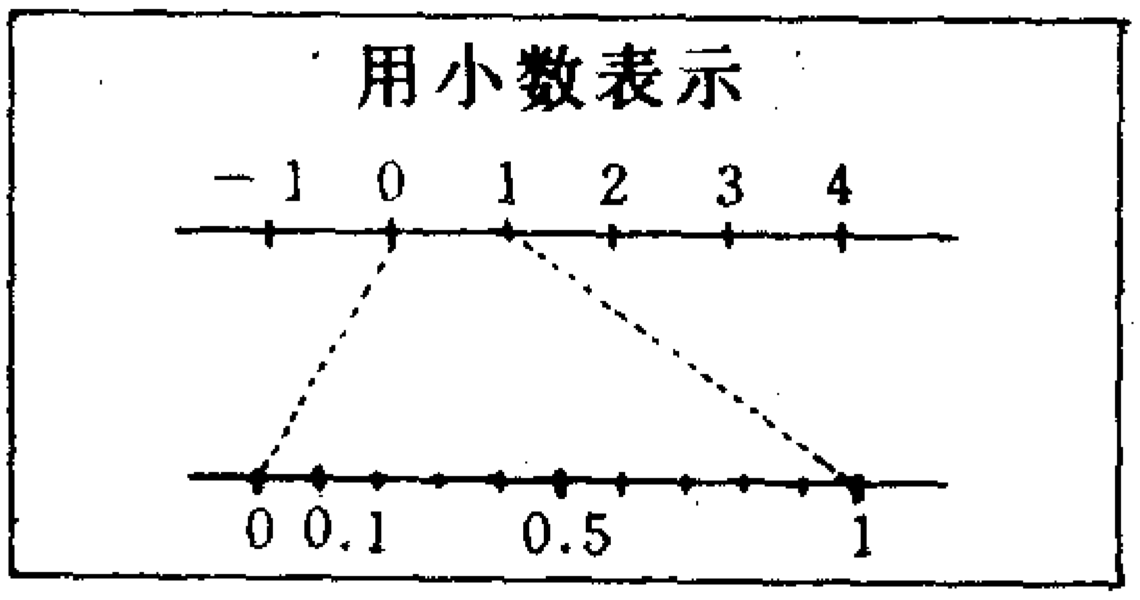


图9

不仅是分数，就是用小数表示出的数（实数），都能用直线上的一个点表示。这

样，把数用直线上的点表示时，把这个直线叫做**数轴**。

（3） 无理数

因为有理数集是稠密的，所以取无论怎样接近的二有理数，它们之间都有无限多个有理数。因此，也许就认为，仅仅有理数就一个挨一个地没有空隙地挤满数轴。但是已知在数轴上也还有无限多个不能用分数表示的数。

这样，把不能用分数形式表示的数叫做**无理数**。

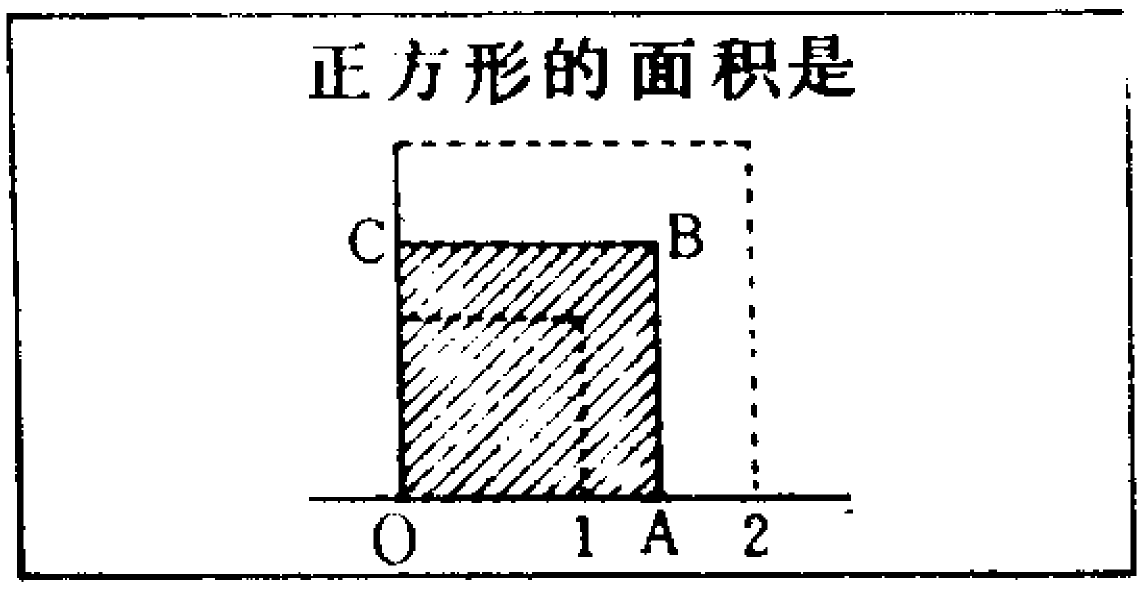


图10

作为无理数的例子，考虑下面问题。

如图10，把直线上的点A，从O向右移动时，正方形OABC的面积，当A来到1的位置时为$1^2=1$，来到2的位置时为$2^2=4$。因为A从1到2移动期间，面积由1到4，逐次到多，在此过程中，面积有恰好等于2的情况。

正方形面积为2时，设其边长为x，则有$x^2=2$，这个实数x（不能表示成分数）是无理数。

如果把x表示成小数，来考察一下它是什么样的数。

因为边长为x，面积为2，则有$x^2=2$。已知x是在1和2之间的数，$1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，由于边长增大面

积也增大，所以

x 是1.4 和1.5 之间的数。

其次，取到小数第二位时，则$1.41^2 = 1.9881$，$1.42^2 = 2.0164$，所以

x 是1.41和1.42之间的数。

再如，取到小数第3位时，可知，

x 是1.414 和1.415 之间的数。

把这种作法继续下去，易知x能用

1.41421356…………

这样的无限小数表示。

从图形中求这x的长度是很简单的。如图11，把边长为2的正方形各边的中点联结起来，作出正方形ABCD，因为这个正方形的面积为2，所以AB的长度是x。这个长度可以看作是边长为1的正方形的对角线的长度。

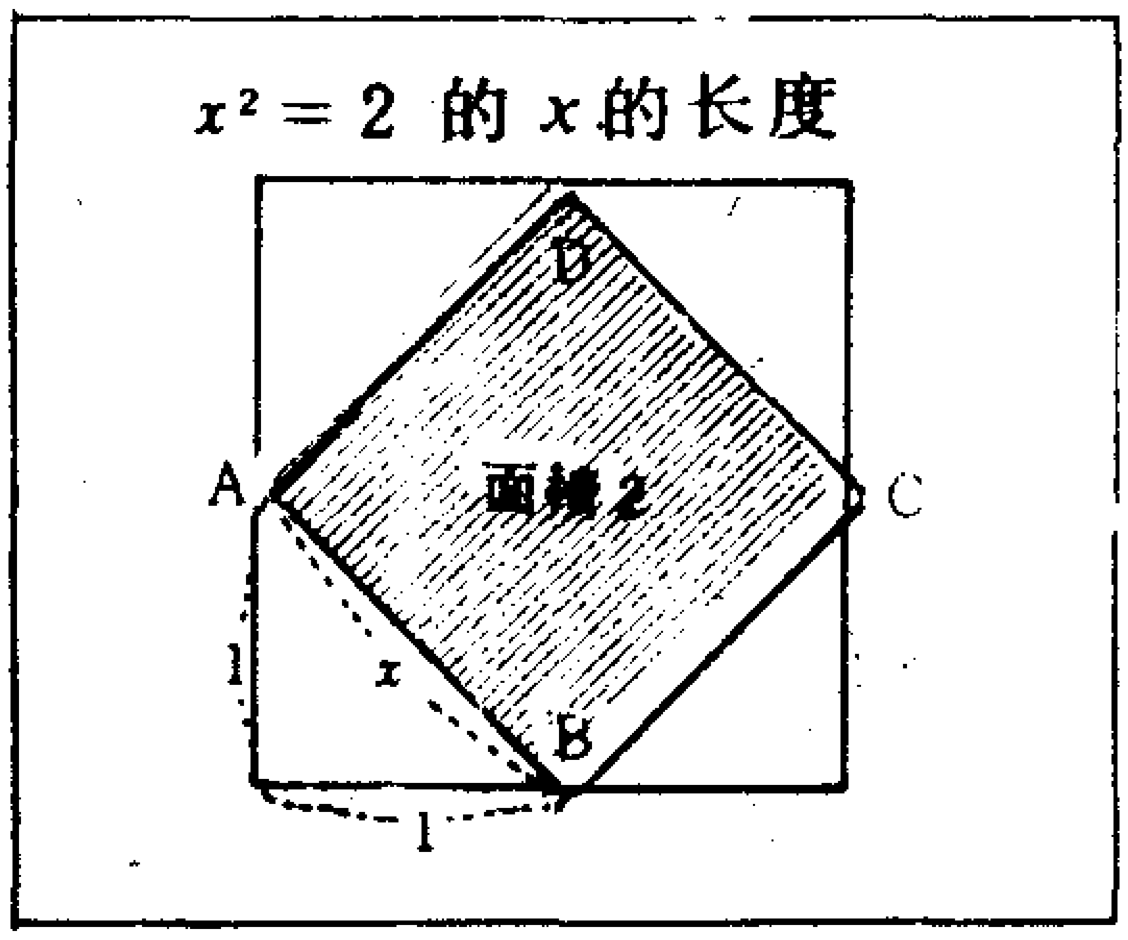


图11

作为无理数的例子，其它还有$x^2 = 3$，$x^2 = 5$，$x^3 = 2$，$x^5 = 6$ 以及π 等，这样的数很多。

这些数为什么是无理数？这个证明在此处省略不讲。

用小数表示无理数时，一定是用不循环的无限小数表示。

在上面所举的例中，

如 $x^2=3$， 则 x 为1.732050…………

$x^2=5$， 则 x 为2.236067…………

$x^3=2$， 则 x 为1.2599…………

$x^5=6$， 则 x 为1.4310…………

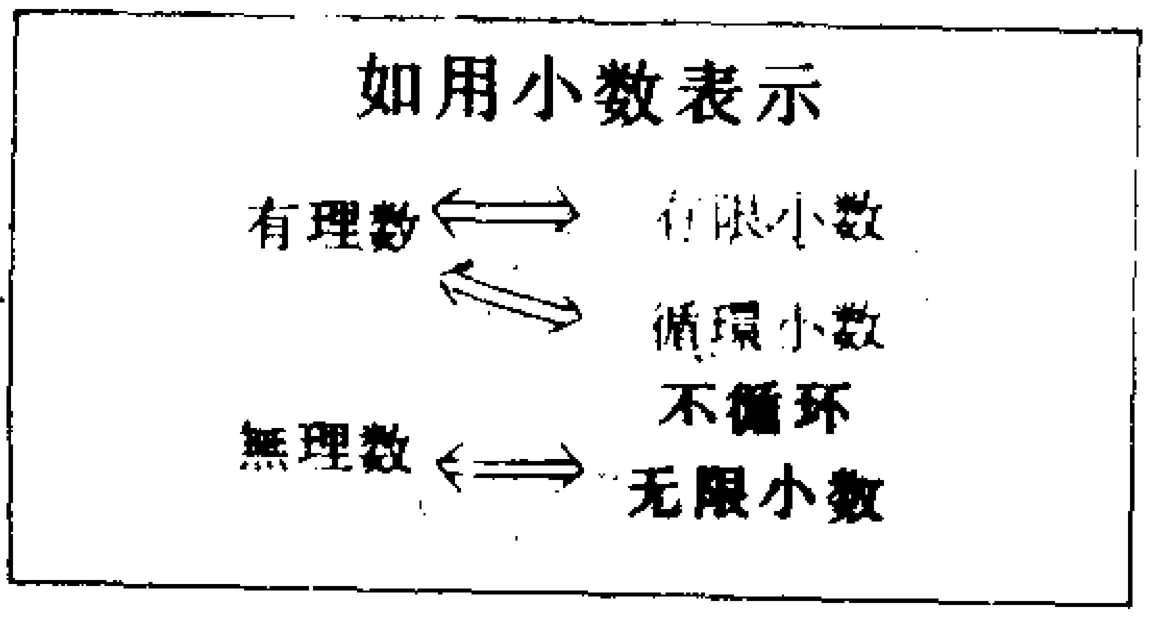
圆周率 π 为 3.14159 …………

相反地，我们也知道不循环的无限小数为无理数。

因此，如果考虑不循环小数

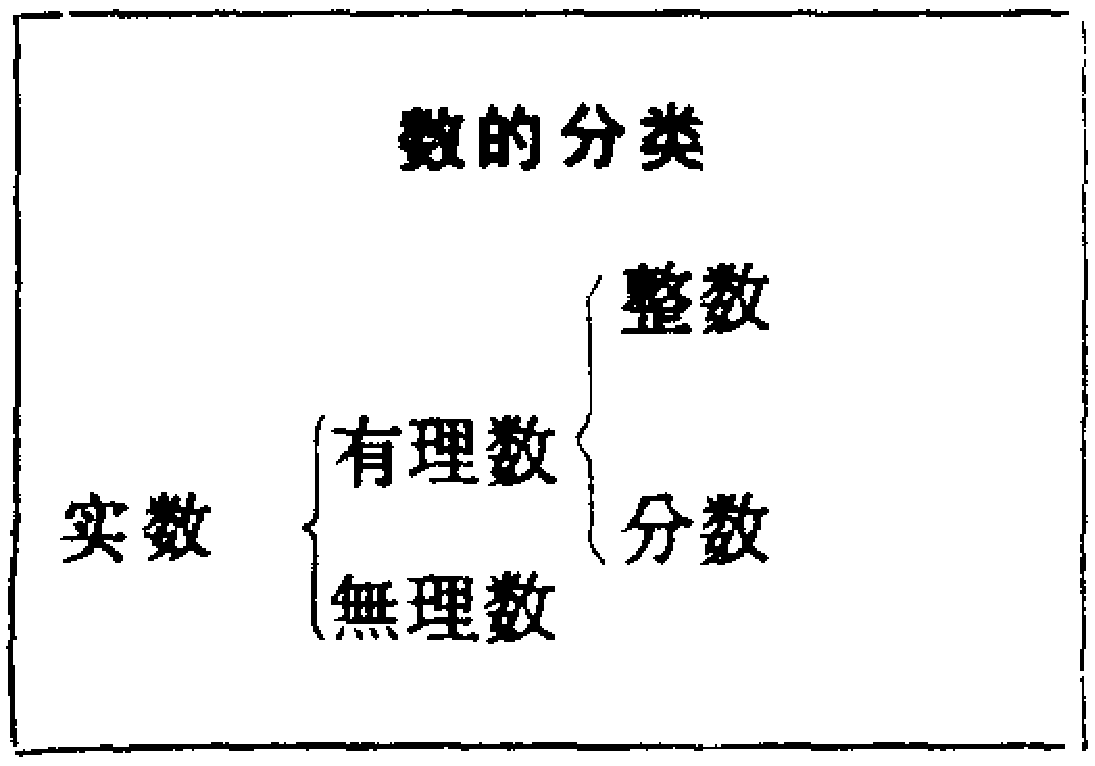
1.21221222122221……

可知无论多少的无理数的例子也都可以作出。



在前面，已经讲述了能用小数表示的数叫做实数。实数是由有理数和无理数合起来的数。而且数轴是能表示全体实数的直线。

从实数集中，任取一个数，在数轴上就能确定一个表示这个数的点，相反地，在数轴上任取一个点，则被这个点表示的数也将唯一确定。把这事实叫做实数集和数轴上点集的**一一对应**。由此，在研究数的一些性质时，讨论数轴上点之



间有哪些关系就可以了。

【想一想】 1 在数轴上，把表示(1)(2)(3)(4)的点取出来。

(1) $2.\dot{3}$　(2) $-\frac{5}{3}$　(3) 0.13　(4) -0.6

2　在0.563和0.564之间的有理数和无理数各举出一个

【略　解】 2　例如　0.5635和0.56353353335……

§2. 等式和不等式

(1)　什么是等式?

在前节，学过了实数。此后，只要说数就是指实数。在实数中前面已经说过加法，减法，乘法，除法计算都是可能的。当然0不能作除数，在其它情况下，把这四种运算组合起来的计算，其结果都是实数。

且说进君拿150日元去买苹果，在水果商店里，有价值为30日元，40日元，60日元的苹果三种。用150日元去买，正好可以买30日元的苹果5个，也可以买30日元的苹果1个和40日元的苹果3个。此外，能考虑出正好用150日元去买

苹果，有几种买法呢？

这就是要考虑，像30×5，30+40×3，30+60×2、30×3+60，这样的式子虽各不相同，但其结果都相等的式子能有多少个。

计算式一给出，结果当然只有一种。但是，得出同一结果的式子，在一般情况下，可以作出很多种。

例如，4×3−5的结果是7，但是2×3+1，10−3，$\frac{5}{2}\times 6-2\times 4$等的结果也是7。这样，两个式子有同一结果时，如

$$4\times 3-5=2\times 3+1 \qquad 4\times 3-5=\frac{5}{2}\times 6-2\times 4$$

这样，可以用等号（=）来写。把这种用等号联结起来的式子叫做等式，等号左侧的式子叫做左边，右侧的式子叫做右边。两侧称为两边。

在上边的式子中，两边式子的值都是7。

所谓等式

$$\underset{7}{4\times 3-5} = \underset{7}{2\times 3+1}$$

$$\underset{6}{2\times 3^2-4\times 3} = \underset{6}{6}$$

左边 $2\times 3^2-4\times 3$
右边 6

图13

两个式子的值不等时，由于不能用等号连结，如

$$3\times 4-2 \neq 2\times 4, \quad 2^2+4\times 2\neq 3\times 2$$

使用符号≠表式。≠是左边和右边的值不相等的记号

【想一想】 在下面式子的□中，添上＝或≠。

(1) $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\square 4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-2$

(2) $1.3+2.8\times 3\square 10\div 2$

【略 解】 (1) ＝ (2) ≠

（2） **等式的性质**

等式

$$4\times 3-5=2\times 3+1$$

两边的值都是7。

现在，把一个数，例如把3加在两边，因为左边右边的值都得10，等式

$$4\times 3-5+\underset{\sim}{3}=2\times 3+1\underset{\sim\sim}{+3}$$

是成立的。

同理，从两端减去3，因哪一边的值都是4，有等式

$$4\times 3-5-\underset{\sim}{3}=2\times 3+1\underset{\sim\sim}{-3}$$

另外，两边乘以3，两边的值都是21，如除以3，两边的值都是$\frac{7}{3}$，

因此等式

$$(4\times 3-5)\times 3=(2\times 3+1)\times 3$$

$$(4\times 3-5)\div 3=(2\times 3+1)\div 3$$

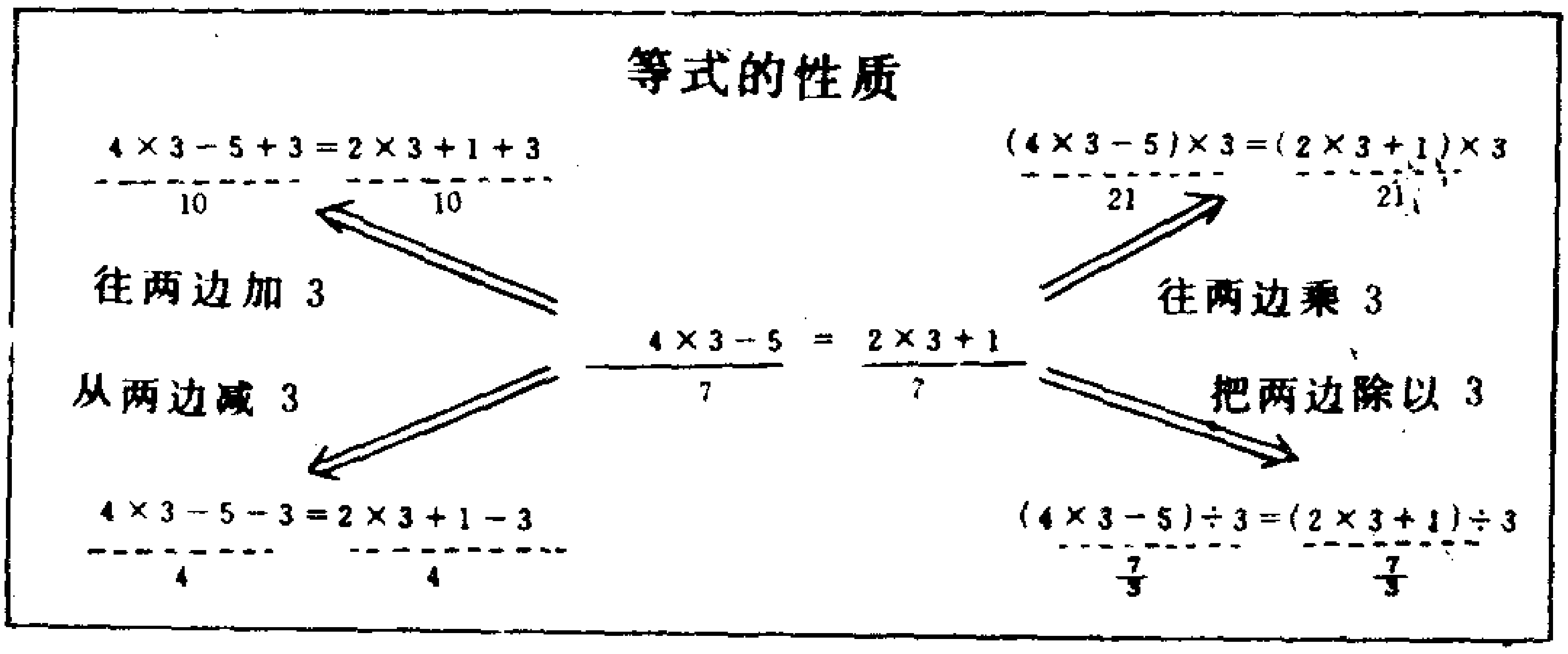


图14

都是成立的。

在两边施行加，减，乘，除的数不是3也可以。并且最初的等式是什么样的式子也都成立。

把这个性质叫做等式的性质，一般用下述形式叙述

【等式的性质】

对等式两边，加，减，乘以同一数，除以非零的同一数时，等式仍然成立。

即

有等式 $A=B$ **时，下式成立，**

Ⅰ $A+C=B+C$

Ⅱ $A-C=B-C$

Ⅲ $A\times C=B\times C$

Ⅳ $A\div C=B\div C$ （但 $C\neq 0$）

（3） 不等式和区间

2 和 5 两数哪一个大，这个问题小学生都能回答。如二物品的重量为 2 kg和 5 kg，因为 2 kg的物品必须再加上 3 kg才成为 5 kg，所以认为 5 kg的物品比 2 kg的重。然而，-3.85和-1.3哪一个大呢？-2和 1 哪一个大的问题，不能连系实际中的量的长度，重量的大小来考虑。

因此，如果讨论有负数的大小，使用数轴是非常方便的。如图15，画出数轴，用直线上的点表示数。

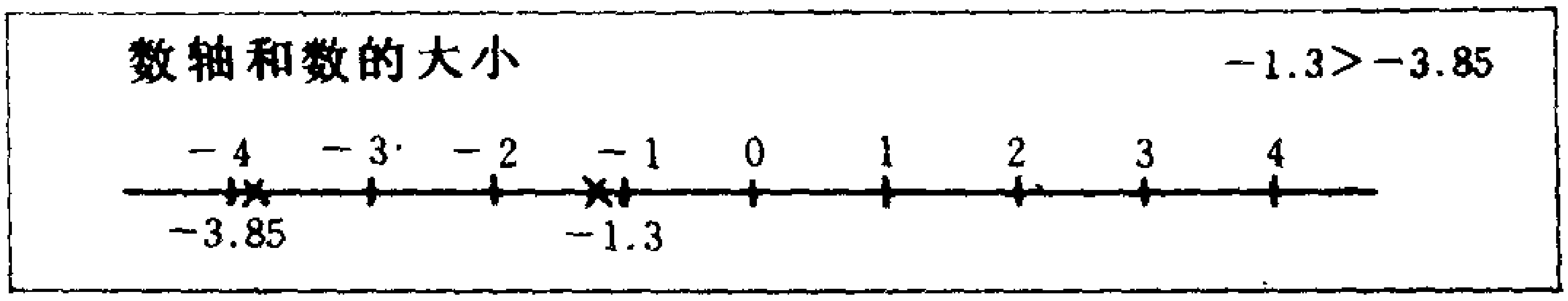


图15

在数轴上的二数，规定右边的数比左边的数大。

因此，从图15中就可以看出，-1.38比-3.85大。此时使用不等号$>$（或$<$），记为

$$-1.38 > -3.85 \quad 或 \quad -3.85 < -1.3$$

在第38页中，两个式子的值相等用等号连接成等式。对于两式的值不相等时，用$\neq$把它们联结起来。然而，两个式子的值不等时，与数的大小相同，可以使用不等号表出一边大于另一边。

例如，因为 $3\times 4-2=10$，$2\times 4=8$，可记为

$$3\times 4-2 > 2\times 4$$

或

$$2 \times 4 < 3 \times 4 - 2$$

如此，用不等号联结的式子，叫做**不等式**，与等式相同，把式子的左侧和右侧也叫做左边和右边。

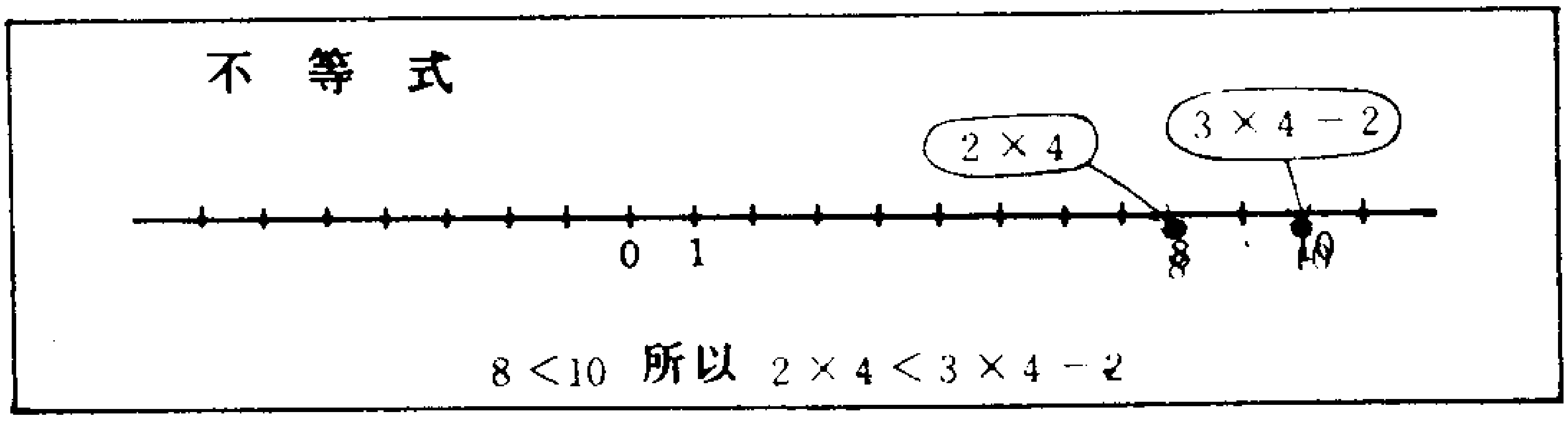


图16

进君在10大前买了长为18*cm*的铅笔。但是今天一量长度发现是7 *cm* 了。因为这是在10天之间逐渐短下来的，所以在使用过程中量长度的话，应该是在18*cm*和7 *cm* 之间。

于是，在10天之间铅笔的长度是在取18到7之间的所有数值逐渐短下来的。

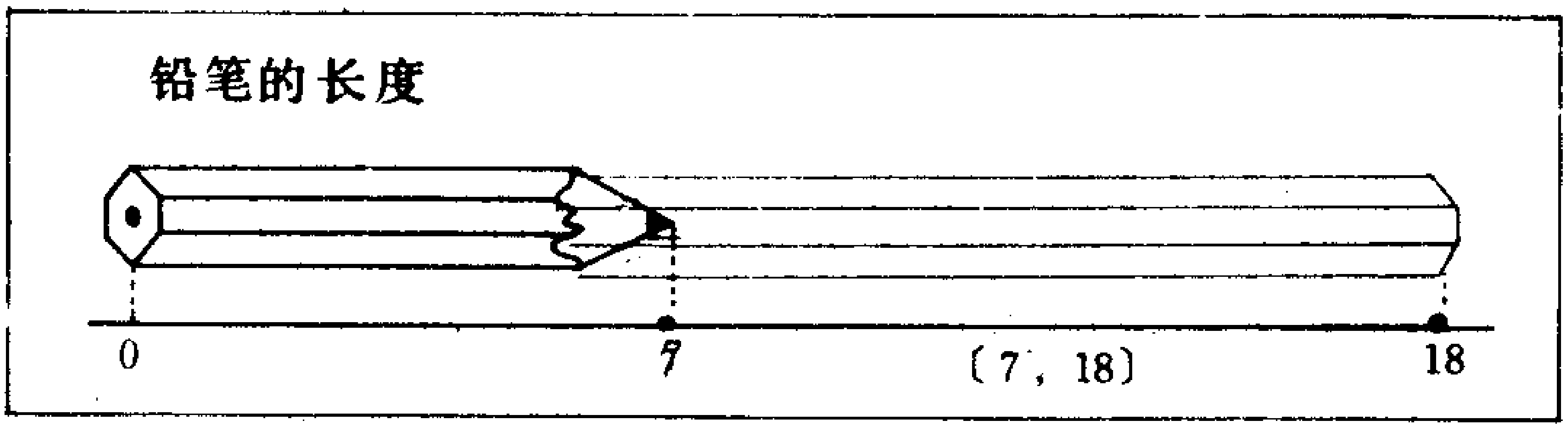


图17

不小于7不大于18的数有无限多个。把这样的数的集合记为

〔7，18〕

所说的不小于或不大于，是说包含这些数的。如果说大于7且小于18的数集，则为不包含两端的集合，记为

（7，18）

这时把〔 〕改写为（ ）。把（ ）和〔 〕组合起来，可以考虑如下的集合

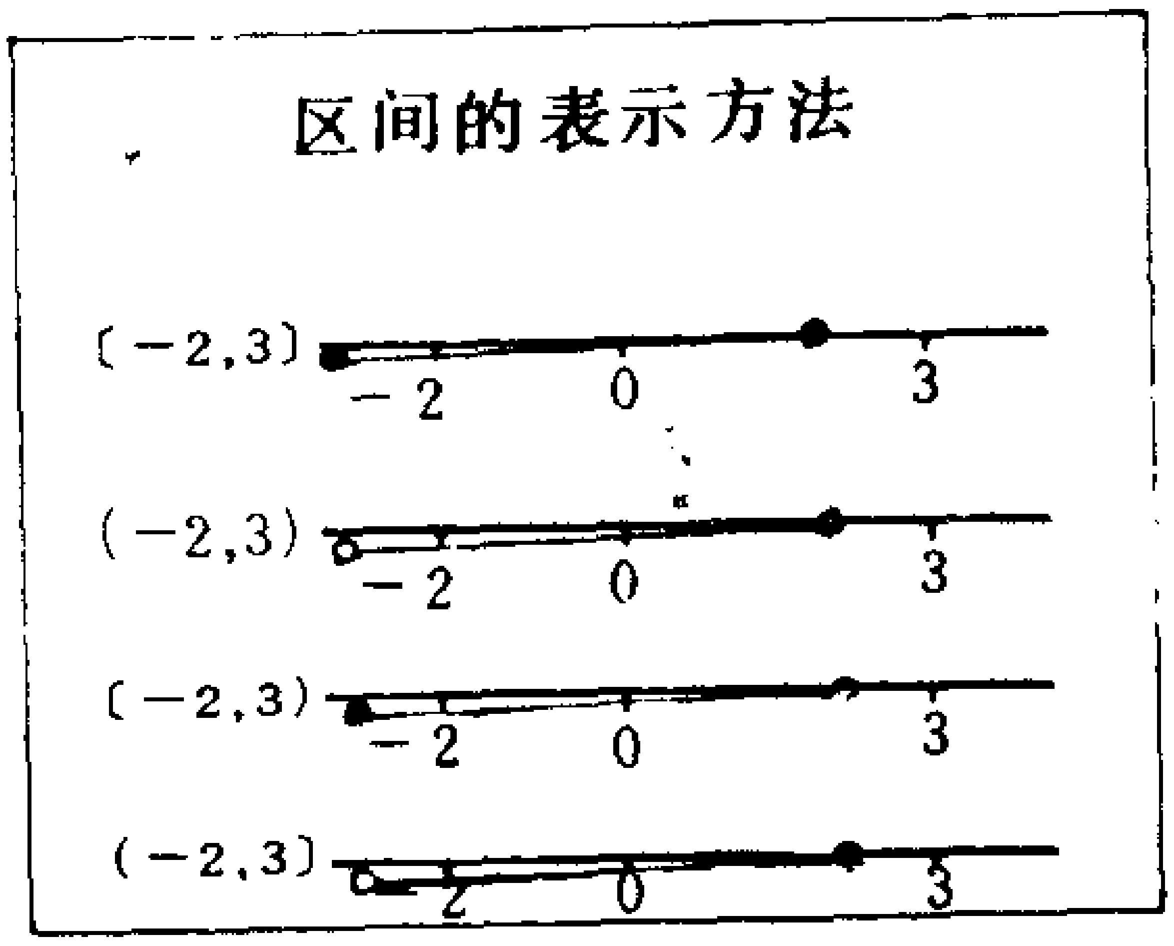


图18

〔-2，3）………不小于2，小于3的数集，

（-2，3〕………大于-2，不大于3的数集。

这样，把两个数之间所有数的集合叫做**区间**。区间在数轴上可用线段表示。

如图18，我们规定区间包含两端的点时用实点• 表示，不包含两端的点时用虚点○ 表示。

在数轴上取数3，由它可把实数集分成三个子集，

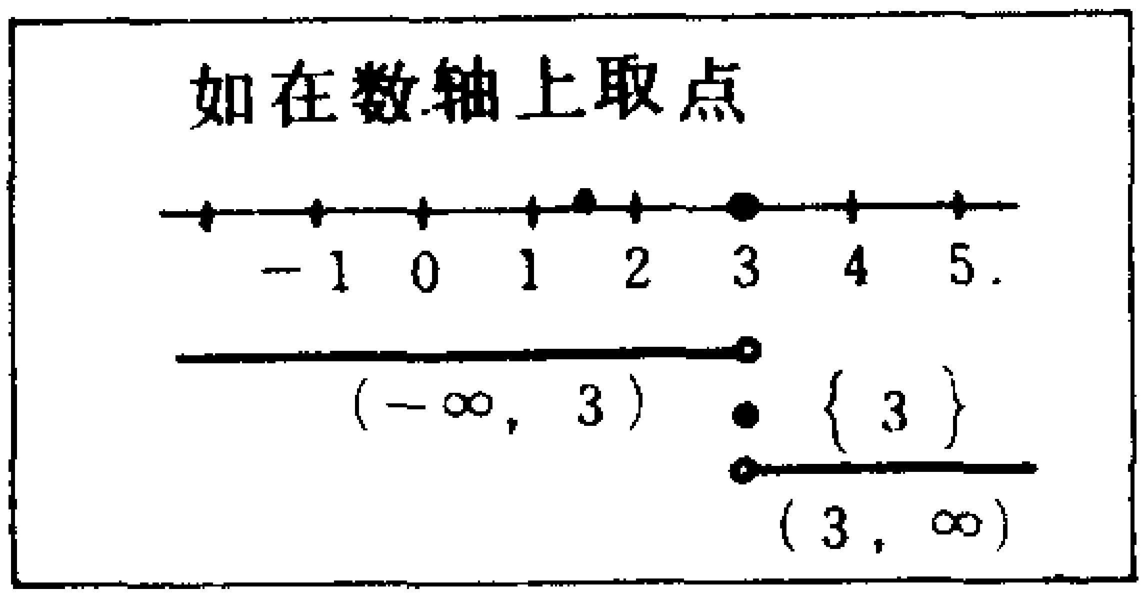
小于3的数集……………………M_1

仅由3构成的数集……………{ 3 }

大于3的数集……………………M_2

∞为表示无限大符号，如图19，可记为

M_1　　（-∞，3）



M_2 （3，+∞）

M_1{3}合起来，为不大于3的数集，记为(-∞，3]，不小于3的数集记为[3，∞)

【想一想】 1.在以3为分母的分数集中，把属于区间[2.8，4]的元素全部写出。

2.写出(-∞，2）和(-1,6)的交集。

【略 解】 1. $\frac{9}{3}$，$\frac{10}{3}$，$\frac{11}{3}$ 　　2.（-1，2）

§3. 方程和它的解

（1） 什么是方程？

进君现有4400日元。从下月开始每月储蓄1200日元，想在10个月以后的毕业旅行时，买一架照相机。要买的照相机是12800日元，问经过几个月后才能买成？

考虑这个问题时，如果用□表示从今以后的月数，到那个时期所存的钱总计则为

$$1200 \times \square + 4400$$

把不同的月数代入箱里考察，如下

$$1200\times\boxed{5}+4400<12800$$

$$1200\times\boxed{6}+4400<12800$$

$$1200\times\boxed{7}+4400=12800$$

$$1200\times\boxed{8}+4400>12800$$

如此，$1200\times\square+4400$的数值，代入箱中的数不大于6时，都比12800小，把不小8的数代入之后，相反地都大于12800。于是可知代入箱中的数是7的时候，恰好是12800日元而作出的。

在前面的例子中，使用字母x代替箱$\square$，则可表示为

$$1200x+4400=12800$$

因为用x代替$\square$，往x里代入各种数。

在这个例子中，因为想在10个月以内买到照相机，往x代入的数应是集合

$$\mathbf{X}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

的元素。

$$1200x+4400=12800$$

虽然是用等号连结起来的，但是原封不动地看，还不能认为它是等式。因为把集合X的元素代入x以后，由于代入的数不同，可以使两边的值相等，也可以使其不等

$1200X+4400=12800$

这是

$1200\times\square+4400=12800$

因为由于往x代入数

$1200\times\boxed{5}+4400\neq12800$

$1200\times\boxed{7}+4400=12800$

而得到的所以不是等式

图20

（图20）。

现在考虑另外一个例子。

如图21，在一条向东西伸延的道路上，有距离为 800m 的A，B 二点。进君骑自行车以 240m／分的速度从西边的A点出发往东去，在同一时间他的弟弟明君以60m／分的速度步行从东边的点B 出发向东去。问出发后经过多少分钟进君追上他的弟弟。

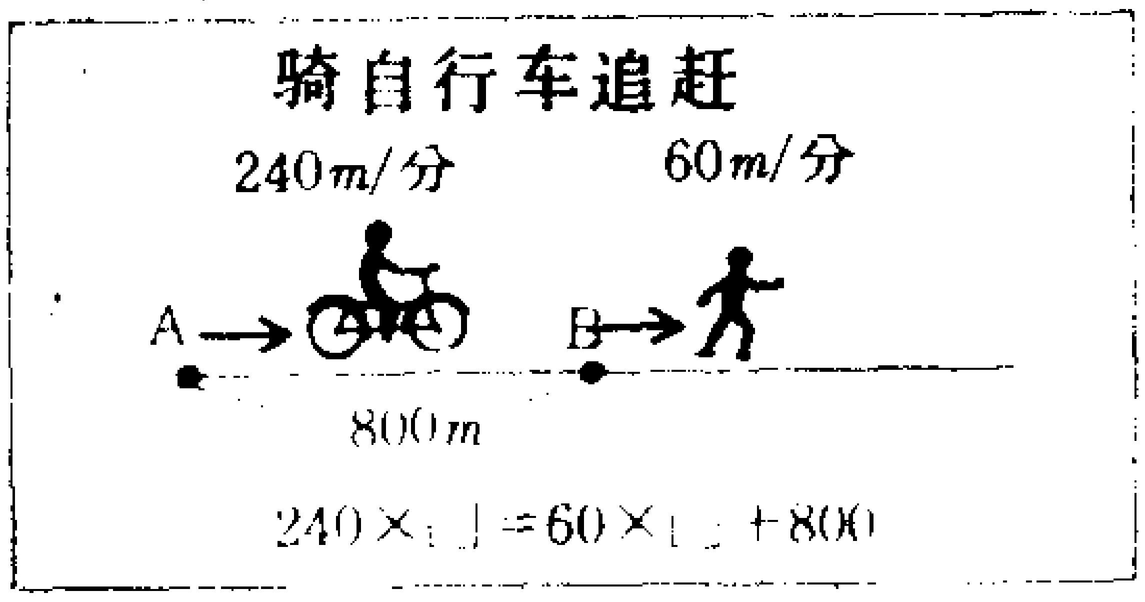


图21

在这里，用□表示出发后的时间，能列出下式

$$240\,\square = 60\,\square + 800$$

如果使用字母 x，则可写成

$$240x = 60x + 800$$

往 x 代入的数是从 0 到很大的实数的集合

$$X = (0, \infty)$$

中的元素。因此，如用第45页例题的方法去找使等式成立的数，是不可能的。

上面考虑的式子

$$1200x + 4400 = 12800$$

$$240x = 60x + 800$$

仅仅把集合X 中的某个特殊的数代入 x 才是等式。

这样的，在含有字母的用等号连结起来的式子， 只有用特殊的数代入字母，才使等式成立的式子叫做**方程**。在方程中，把具有□的作用的字母叫做**变数**或**未知数**。把能取未知数的数集X，叫做变数 x 的**变域**。

方程的未知数多半使用字母 x，但是 x 以外的字母也可以使用。因此，同一方程由于用不同的变数，如

$$2x+3=x^2-5 \qquad 2y+3=y^2-5$$

这样可以有几种表示方法。在一般情况下，多半用字母 x，y，z 表示变数。

考虑式子

$$4(x+3)=4x+12$$

把这个式子的左边根据分配律展开，就得到右边。因此这个式子，把任何数代入 x 时，左边和右边的值都相等。

这样的，在用等号连结起来的式子中，用任何数代入字母等式都成立时，把这样的式子叫做**恒等式**。恒等式也被认为是特殊的方程，但是开始就要把它和方程区别开。

【想一想】 在下列各文中，把（ ）内的内容作为变数 x，作出方程

（1）用 400日元买8个苹果还剩下40日元。

（1个苹果的价值）

（2）横的长度比竖的长度多5m的矩形，其面积为66m^2。

（竖的长度）

【**略　解**】 (1) $8x+40=400$ (2) $x(x+5)=66$

(2) 方程的解

考虑变数x的变域为 $X=\{1, 2, 3\}$的方程

$$4x-6=x^2-x$$

虽然把1代入这个方程中的x时，等式不成立，但是把2，3代入时等式成立了。

在方程中，把变域中的哪个数代入使等式成立呢？问题是要求出全部使等式成立的数。于是，变域中的使等式成立的数叫做方程的**解**。而把求出方程的全部解叫做**解方程**。

在上述例中，2和3是方程的解。

方程的解也叫做根，在本书中除了特殊情况外，都使用解这个词。此外，把所有的解集合起来叫做方程的**解集合**。在上例中解集合是$\{2, 3\}$。解方程可以说是求方程的解集合。

表示集合的方法，我们已经知道如把$\{x \mid x$是2的倍数$\}$写作$\{x \mid \cdots\cdots\}$的方法。这是说"使……成立的全体x的集合"的意思。

因此，解方程

$$2x+3=7$$

就是在变域X的元素中，求出代入$2x+3=7$中的x，使等式成立的元素的集合。于是解方程$2x+3=7$是在集合

X 中，求出$\{x \mid 2x+3=7\}$这样的子集（图22）。

【例题】 解下列方程

（1）$\frac{2x+1}{3}=x-1$

$X=\{3, 4, 5\}$

（2）$x^2=3x+4$

$X=\{1, 2, 3\}$

（解） （1）是

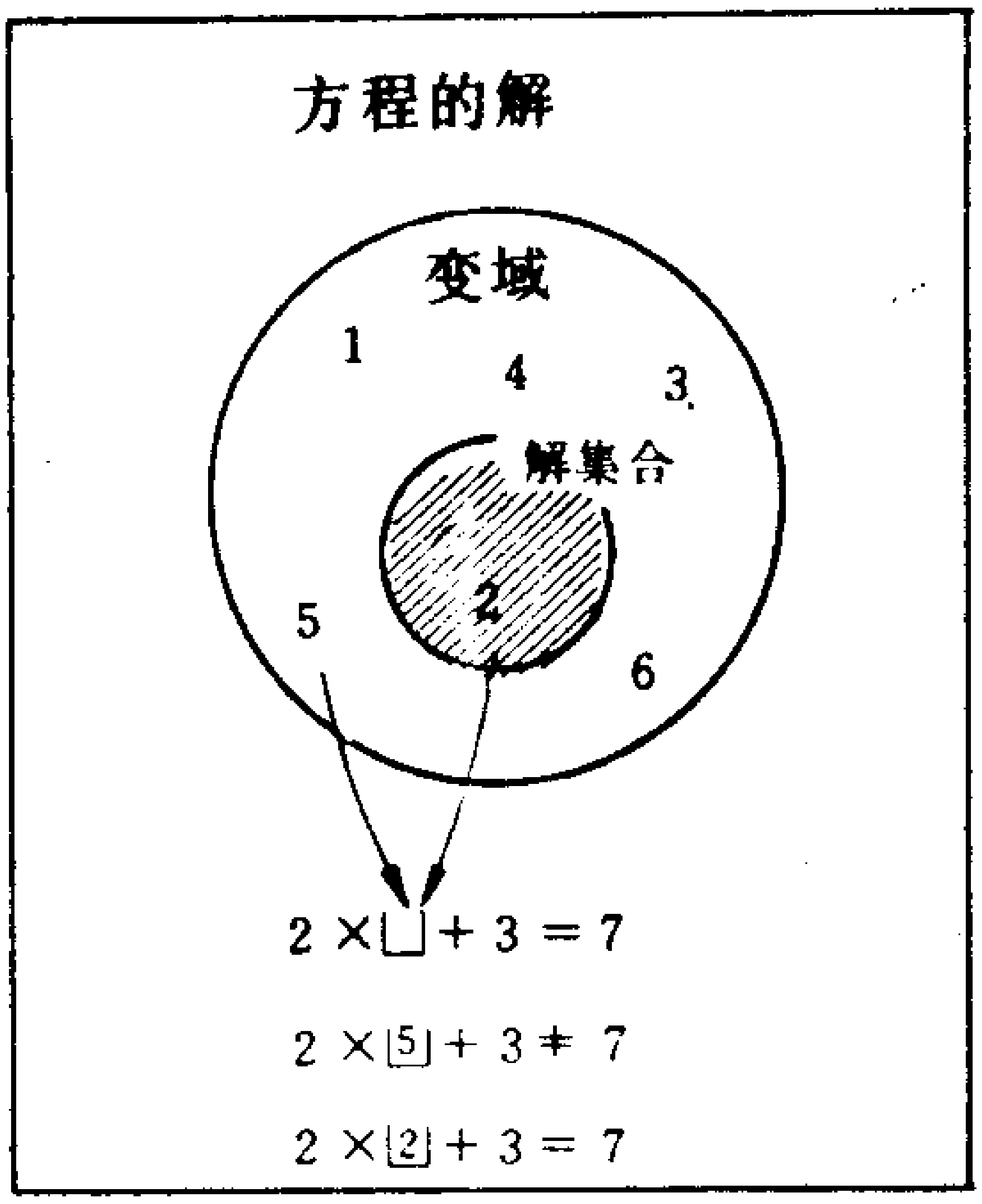


图22

$x=3$ 时 $\frac{2\times 3+1}{3}\neq 3-1$

$x=4$ 时 $\frac{2\times 4+1}{4}=4-1$

$x=5$ 时 $\frac{2\times 5+1}{5}\neq 5-1$

由此则解是 4。

（2）是

$x=1$ 时 $1^2\neq 3\times 1+4$

$x=2$ 时 $2^2\neq 3\times 2+4$

$x=3$ 时 $3^2\neq 3\times 3+4$

因此无解。

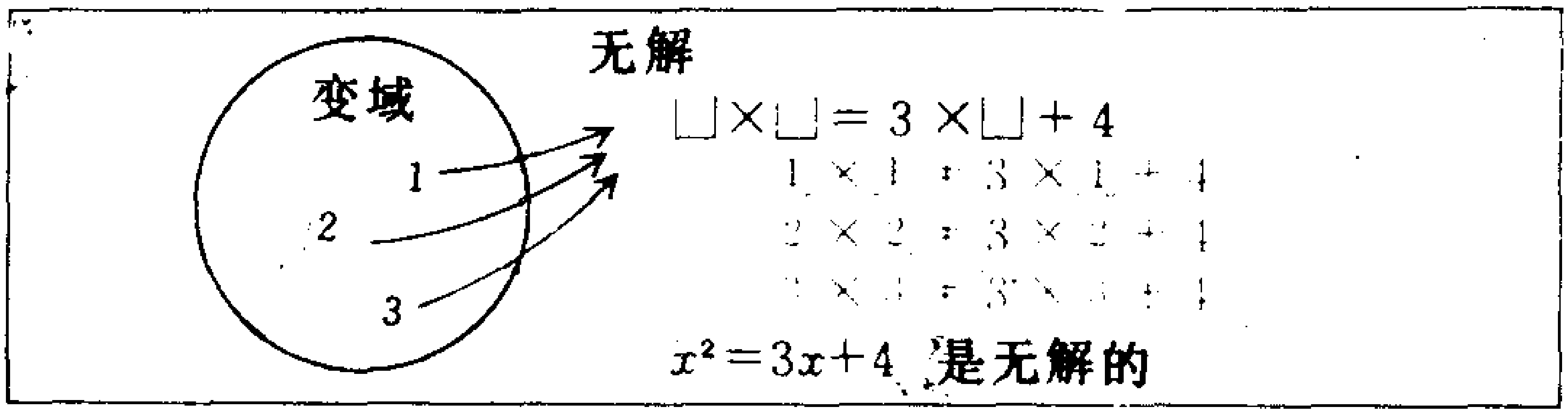


图23

像上例中(2) 那样，无解时，解集合是空集。这个方程 $x^2=3x+4$，以4代入x，等式成立。但是因为4不包含在变域X＝{1，2，3}中，因此这种情况下无解。

【想一想】 1． 变域为X＝{2，4，6，8}时，解下列方程

(1) $2x+3=4x-5$　　　　(2) $x^2+12=8x$

(3) $2(x+1)=5-x$　　　　(4) $0(x+2)=0$

2． X＝{1，2，3}时，作出解为3的方程

【略　解】 1． (1) 4　(2) 2，6　(3) 无解

(4) 2，4，6，8　　2． 略

方程的历史　（其一）

在纪元前1650年间，埃及的阿梅斯写了帕匹鲁斯，这是所知的最古老的数学书。所说的帕匹鲁斯是采用水草作纸而成的。在阿梅斯的帕匹鲁斯中，说明了有关分数的一些问题，也记载了几个归结为一次方程的问题。

一方面，约在纪元前2000年在巴比仑，数学相当发达，不仅是一次方程，就连二次方程也都知道了。

但是在埃及和巴比仑的数学中，因为不能采用符号和字母把实际问题用式子表示出来，而只是用语言说明解法。此外，在这一时期还没研究解一次方程的一般方法

虽然最先使用符号表示方程的是春番图（纪元300年间），但是因为还不知道负数，各种关系处理的不好。

用现在的字母和符号，这种表示方法来研究方程，是很久以后的事了。

第三章　一次方程

§1．同解变形

（1）　同解方程

前章第49页在「§3 方程的解」中，说解方程是把变域X中的每一个元素代入方程的变数 x 去找解。

但是如果方程的变域X是全体实数的集合，成为实数区间的时候，因为变数是无限多个，所以用这种方法去解是不可能的。

变域为全体实数的集合时，解方程

$$3(x-2)-1=2(4-x) \quad \cdots\cdots ①$$

进君考虑了下面的方法。

首先，去掉式子两边的括号，进行整理，得到方程

$$3x-7=8-2x \quad \cdots\cdots ②$$

再把 $2x$ 加在式子两边，得

$$3x-7+2x=8-2x+2x$$

整理两边得方程

$$5x-7=8 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

其次把7加在两边得

$$5x-7+7=8+7$$

整理后得方程

$$5x=15 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

其以 5除两边得

$$x=3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

所以解是 3 。

把进君的这种解法，再作进一步研究。

首先，说解是 $x=3$ 是不合适的。 $x=3$ 仍然是方程，可以说方程的解是3（图1 ）。

最简单的方程

$x=3$

这个解是

$\boxed{3}=3$

所以 3.

按这个求解!

图 1

其次，进君从方程①出发，把两边进行几次整理的同时，在中间进行了

“把2 x 加在两边” ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ⓐ

“把7 加在两边” ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ⓑ

“用5除两边” ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ⓒ

进君像ⓐ，ⓑ，ⓒ那样，考虑把 2 x 和 7 加在两边，以及用 5 除两边，是从第40页的使用等式变形的想法来的。

但是，仔细想一下，可以看出ⓐ，ⓑ，ⓒ的变形，并不叫等式变形。

为什么这样说？方程是只有把它的解代入变数 x 时，才能成为等式。它和只把等式变形，意思稍微有些出入。

在这里，仅仅是从方程①出发，依次地作ⓐ，ⓑ，ⓒ的变形，得到了②，③，④，⑤的方程（图2）。

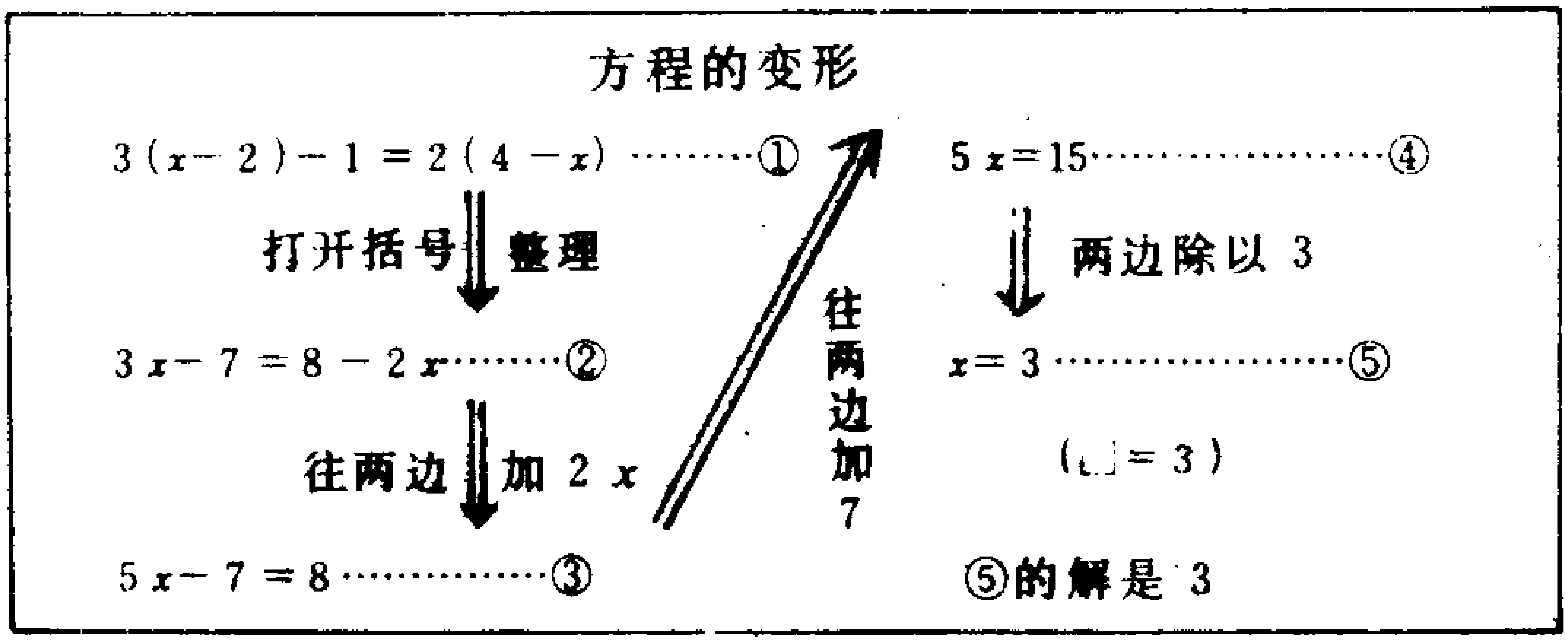


图 2

而方程⑤ $x=3$，只是当把 3 代入 x，成为 $\boxed{3}=3$，等式才成立。

因而 $x=3$ 的解是3。于是把 3 代入方程①，②，③，④的 x 进行试验，可以看出每个都是等式。

$$3(\boxed{3}-2)-1=2(4-\boxed{3}) \cdots\cdots ①'$$

$$3\times\boxed{3}-7=8-2\times\boxed{3} \cdots\cdots ②'$$

$$5\times\boxed{3}-7=8 \cdots\cdots ③'$$

$$5\times\boxed{3}=15 \cdots\cdots ④'$$

确实 3 是最初方程的解，进君的解法是正确的。

那么为什么把 3 代入后都成为等式？试说明其理由。首先，于方程①把 3 代入 x ，得

$$3（\boxed{3}-2）-1=2（4-\boxed{3}）\cdots\cdots\cdots\cdots\textcircled{1}'$$

使两边的值为 2 的等式成立，所以，将认为 3 是方程①的解。此时，因为打开两边的括号进行整理，两边的值也不应变化，如

$$3\times\boxed{3}-7=8-2\times\boxed{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\textcircled{2}'$$

得到两边的值也都是 2 的等式。

其次，往②′两边加上 $2\times\boxed{3}$ 时，因为两边的值都增加 6 ，由等式性质知，可得到

$$5\times\boxed{3}-7=8\cdots\cdots\cdots\cdots\textcircled{3}'$$

这个是等式。

由等式的性质，把 7 加在③的两边，其两边再除以 5 ，也仍然是等式，

$$5\times\boxed{3}=15\cdots\cdots\cdots\cdots\textcircled{4}'$$

$$\boxed{3}=3\cdots\cdots\cdots\cdots\textcircled{5}'$$

这样，把 3 代入方程①时，因为那个①′式子成为等式，应用等式的性质导出②′，③′，④′，⑤′。可是由于②′，③′，④′，⑤′是 x 代入 3 而得到的，可以说

a　方程①的解，也是②，③，④，⑤各方程的解。

其次，把不是方程①的解的数（例如 4 ），代入时，如

$$3\times（\boxed{4}-2）\neq 2（4-\boxed{4}）$$

这次就不是等式。此时，像前面那样依次变形后，可作出

$3\times\boxed{4}-7$ （　） $8-2\times\boxed{4}$

$5\times\boxed{4}-7$ （　） 8

$5\times\boxed{4}$ （　） 15

$\boxed{4}$ （　） 3

这些式子。

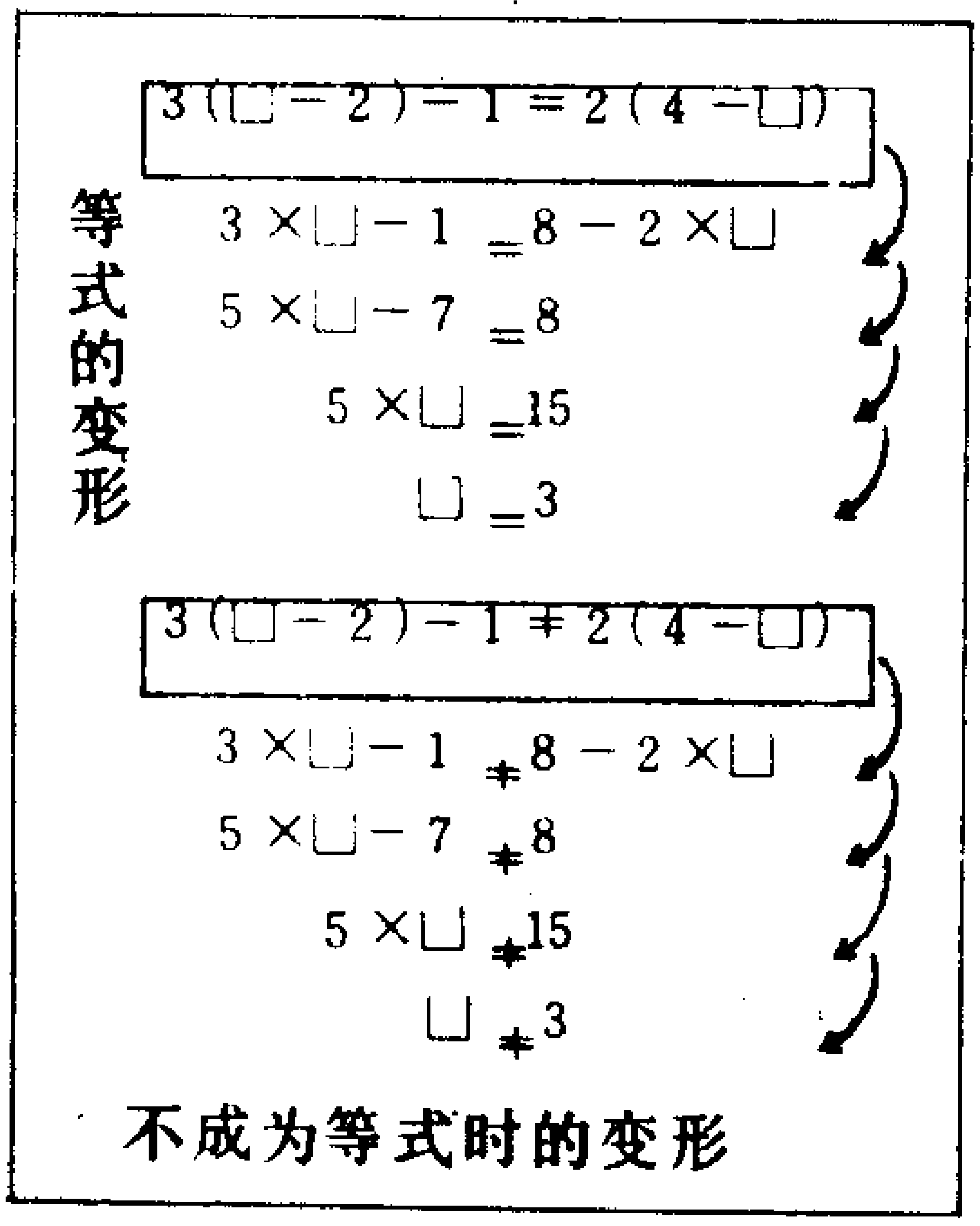


图 3

考虑在（　）中，写入＝和≠哪一个时，由于最初的式子就不是等式，所以无论每个（　）中也都应是≠（图3）。因此可知

b　如果一数不是方程①的解，那么也不是②、③、④、⑤的解。

把前页的 *a* 和这页的 *b* 放在一起可知，①的解也是②，③，④，⑤的解，一个数不是①的解，也不是②，③，④，⑤的解。由此可以说方程①，②，③，④，⑤具有相同的解集合。

把解都相同的方程叫做同解方程。

【想一想】　X＝｛1，2，3｝时，下面的方程哪些是同解方程？

（1）　$x=2$　　　（2）　$2x+3=4x-3$

（3）　$3x-3=2x$

【略　解】　（2）和（3）

（2）　同解变形

如同在前页以前说的那样，解方程就是，依次地作出同前一个方程的同解方程，最后得到 $x=\square$ 形的方程就可以了。

因此，只要知道作什么样的变形才能得到同解方程，方能解方程。把不使方程的解发生变化，所作出同解方程的变形，叫做方程的同解变形（图 4 ）。

像下面的变形就是同解变形。

○　**打开方程两边的括号再进行整理。**

○　**（1）方程两边加上相同的数或式子。**

（2）从方程两边减去相同的数或式子。

（3）方程的两边乘以相同的非零的数。

（4）方程的两边除以相同的非零的数。

在第二章的 §3 （参看第49页），所研究过的方程变数 x 的变域，是很少几个元素的有限集合。但是在研究从实际问题中得到的方程时，在很多情形下都要考虑全体实数的集合。

于是从此以后，变数是所有实数的时候，不特别写出变域都是可以的。并且，不写变域时，就认为变域是所有实数

的集合。

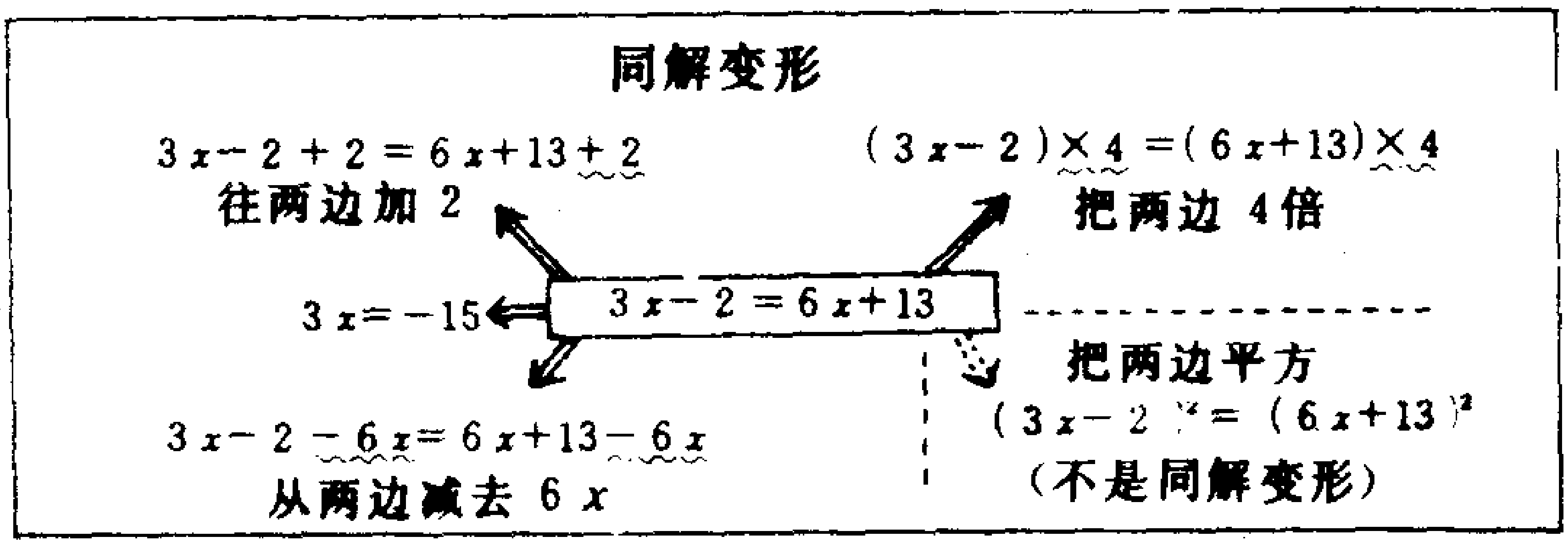


图 4

例如在第53页研究的方程，不特别写出变域，只写

$3(x-2)-1=2(4-x)$　即可。

并且因为所说的同解变形，是方程的解不发生变化的变形，可以使用集合符号，写作

$$\{x \mid 3(x-2)-1=2(4-x)\}=\{x \mid 3x-7=8-2x\}$$

$$=\{x \mid 5x-7=8\}=\{x \mid 5x=15\}=\{x \mid x=3\}$$

【想一想】 把下列方程按同解变形的方法变成 $x=\square$ 的形状。

(1)　$7x-3=2(x+31)$

(2)　$5(2x-1)+13=2(2x+1)$

【略　解】　(1)　$x=13$　　(2)　$x=-1$

§ 2. 一次方程的解法

（1） 一次方程的解法

有一个两位的整数，个位数和十位数的数字的和为 9，将个位和十位数的数字调换后所得到的数，较原数的 2 倍小 9，试问这个整数是多少？

一次方程的例子

$$5x-6=9x+4$$

$$\frac{2}{5}y+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}y-1$$

$$(x-2)^2=(x-3)(x+3)+4$$

$$t+4-2t=5(t-1)$$

$$2\{10(9-x)+x\}-9$$
$$=10x+(9-x)$$

图 5

这个问题，虽然可以通过对几个数的考察之后，能简单地得到答案，但要用列方程的方法解一解看。

设个位数的数字为 x，则十位数的数字必为 $9-x$，这个整数可表示成

$10(9-x)+x$，于是从问题的叙述中可得方程

$$2\{10(9-x)+x\}-9=10x+(9-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

把这个方程打开括号后，只含有 x 的一次项，但不含高于一次（x^2，x^3 等）的项。把这样的方程叫做**一次方程**（图 5）。

方程①的变数 x 的变域，虽然应为 1 到 9 的整数，但是把全体实数的集合作为变域去解。

首先，把①两边的括号打开再进行整理得

$$-18x+171=9x+9 \cdots\cdots ②$$

其次，由于从两边减去 $9x$，得

$$-18x+171-9x=9 \cdots\cdots ③$$

再把左边归纳一起，得

$$-27x+171=9 \cdots\cdots ④$$

其次，从两边减去171，得

$$-27x=9-171 \cdots\cdots ⑤$$

即得出　$-27x=-162$

两边除以−27，得

$$x=6 \cdots\cdots ⑥$$

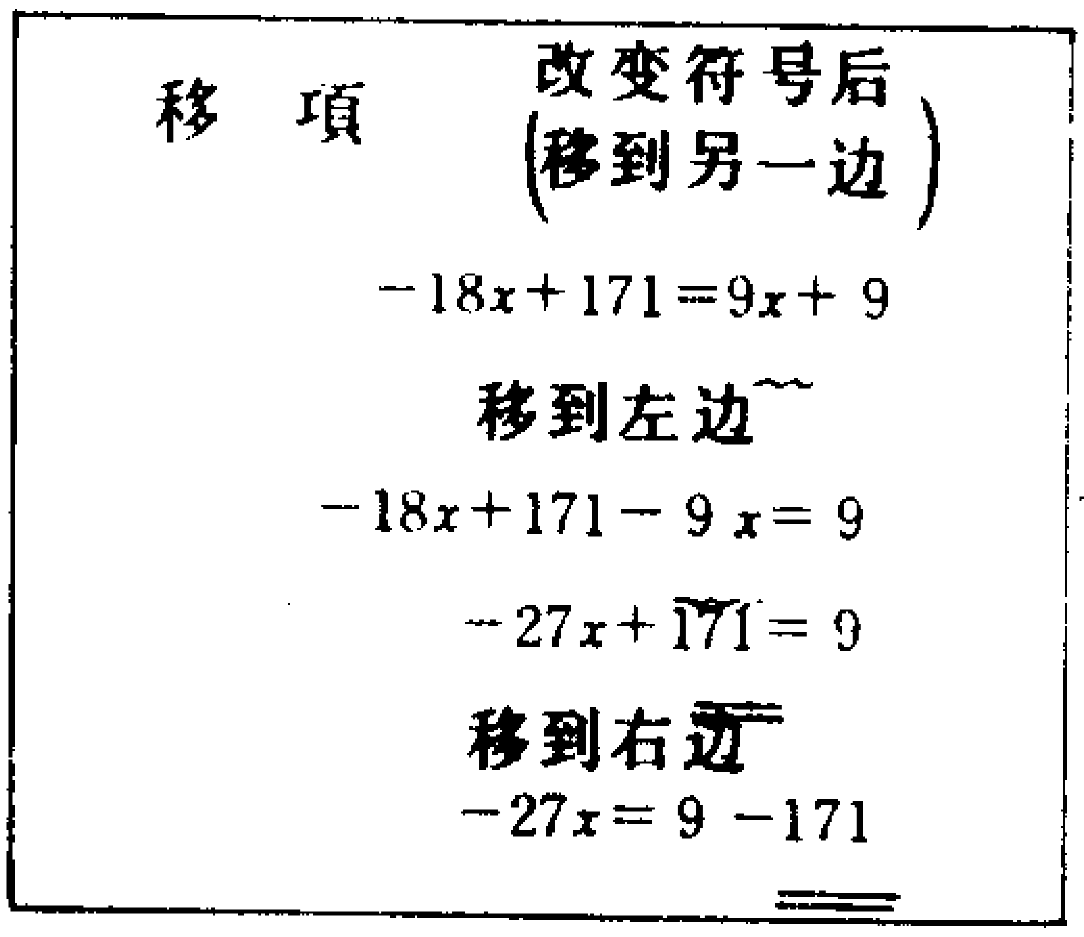


图6

最后的方程⑥的解是6，因为从①到⑥是同解变形，所以最初的方程的解也是6。

把6代入最初的方程中的 x，由于

左边 $=2\{10(9-\boxed{6})+\boxed{6}\}-9=63$

右边 $=10\times\boxed{6}+(9-\boxed{6})=63$

的确可以断定它是解。

而且由于6是1到9之间的整数，所以可知这节开始的问题中的两位数是36。

前页的变形，从②式两边减 9 x 得③式，从④式两边减去 171 得⑤式。可是比较②式③式画波纹线～～～～～的部分，③式是把②式右边的 9 x 变号后的 $-9x$，移到左边后得到的。另外，比较④式⑤式画横线 ═══ 的部分，知⑤式是把④式左边的171改变符号后的 -171 移到右边得到的。

这样，我们要注意，把两边加上或减去相同的数和式子，是和把一边的数或式子改变符号移到另一边相同的。于是把在一边的数或式子改变符号移到另一边的作法，叫做**移项**（图6）。

移项也是方程的同解变形。

这样，怎样解一次方程大致清楚了。先整理两边，经过移项，把含 x 的项移到左边，把不含 x 的项移到右边。而且，在最后要用 x 的系数除两边。

一次方程的解法

$$t+4-2t=5(t-1)$$

○ 去掉括号后整理

$$-t+4=5t-5$$

○ 把含 t 的项移到左边

$$-6t+4=-5$$

○ 把常数移到右边

$$-6t=-9$$

○ 两边用 t 的系数来除

$$t=\frac{3}{2}$$

○ 解是 $\frac{3}{2}$

图7

在下面把解一次方程的步骤归纳如下。

〔**一次方程的解法**〕

○如果含有分数时，两边乘同一数，使方程中不含分数。

○方程中有括号时，打开括号。

○把两边归纳整理。

○在右边如有含未知数 x 的项，把它移项到左边。

○在左边如有不含 x 的项，把它移到右边。

○把两边整理成 ○x ＝△的形式。

○把两边用○除后，得到x ＝□形式的方程。

○解是□。

【想一想】 解下列一次方程

（1） $3x+7=x+15$

（2） $2(4+3x)=10-3(x+1)$

（3） $\frac{y}{3}+\frac{2}{3}=\frac{y}{2}+\frac{3}{2}$

（4） $0.13x+0.08=0.2-0.02x$

【略 解】 （1） 4 （2） $-\frac{1}{9}$ （3） -5 （4） 0.8

（2） 各种例子

从这里开始，通过例题说明一次方程的解法。并且也研究把应用问题列出一次方程。

【例题 1】 解

$$\frac{x+2}{4}+\frac{2x-1}{3}=\frac{x}{6}-1$$

（解） 两边乘以 4 ， 3 ， 6 的最小公倍数12，

$$\frac{x+2}{4}\times 12+\frac{2x-1}{3}\times 12=\frac{x}{6}\times 12-1\times 12$$

$3(x+2)+4(2x-1)=2x-12$

整理后，得　　$11x+2=2x-12$

把 $2x$ 移项　　$9x+2=-12$

把 2 移项　　　$9x=-14$

$x=-\frac{14}{9}$　　　　（答）$-\frac{14}{9}$

在本书中把方程的解写作 $-\frac{14}{9}$，有时也把解写作 $x=-\frac{14}{9}$。但是，应尽量地用仅仅写数的方法。

【想一想】　解下列一次方程

（1）$\frac{2x+1}{5}-\frac{3x-1}{10}=\frac{x+3}{4}$

（2）$3y(y-2)=3(y^2+y)$

【略　解】　（1）　-3　　（2）　0

【例题 2】　解

$-2(x+1)+5x=3(x+1)$

（解）　把括号去掉再整理之，得

$3x-2=3x+3$

移项后得　　$0=5$

最后的式子是0和5相等，这是不合理的。但考察前一个式子，因为左边是从 $3x$ 中减去 2，右边是往 $3x$ 加上3，把什么数代入 x，这也不是等式。因而这个方程无解。

（答）无解

与上例相同，整理两边之后，如果得到两边相等的式子。

$$3x-2=3x-2$$

无论用什么数代入 x，等式永远成立。因此，如果变域是实数集，则解是所有实数（图8）。

特殊的一次方程

$3x-2=3x+3$ は	$3x-2=3x-2$ は
$3\times\boxed{1}-2\neq3\times\boxed{1}+3$	$3\times\boxed{1}-2=3\times\boxed{1}-2$
$3\times\boxed{2}-2\neq3\times\boxed{2}+3$	$3\times\boxed{2}-2=3\times\boxed{2}-2$
$3\times\boxed{3}-2\neq3\times\boxed{3}+3$	$3\times\boxed{4}-2=3\times\boxed{4}-2$
这个无解	**解是所有实数**

图8

【例题 3】

有浓度为 6％的盐水300 g。往这里注入浓度为10％的盐水后，想得到浓度为8.5％的盐水，问应加入多少10％的盐水？

（解） 把注入的10％的盐水重量作为未知数，以 $x\,g$ 表示。

此时8.5％盐水的重量为（300 $+x$）g（图9）。

各种溶液中盐的重量为

6%的盐水300g中盐的重量为

$$\frac{6}{100}\times 300g \cdots\cdots(a)$$

10%的盐水x g中盐的重量为

$$\frac{10}{100}\times x\text{ g} \cdots\cdots(b)$$

8.5%的盐水（300+x）g中盐的重量为

$$\frac{8.5}{100}\times(300+x)\text{ g} \cdots\cdots(c)$$

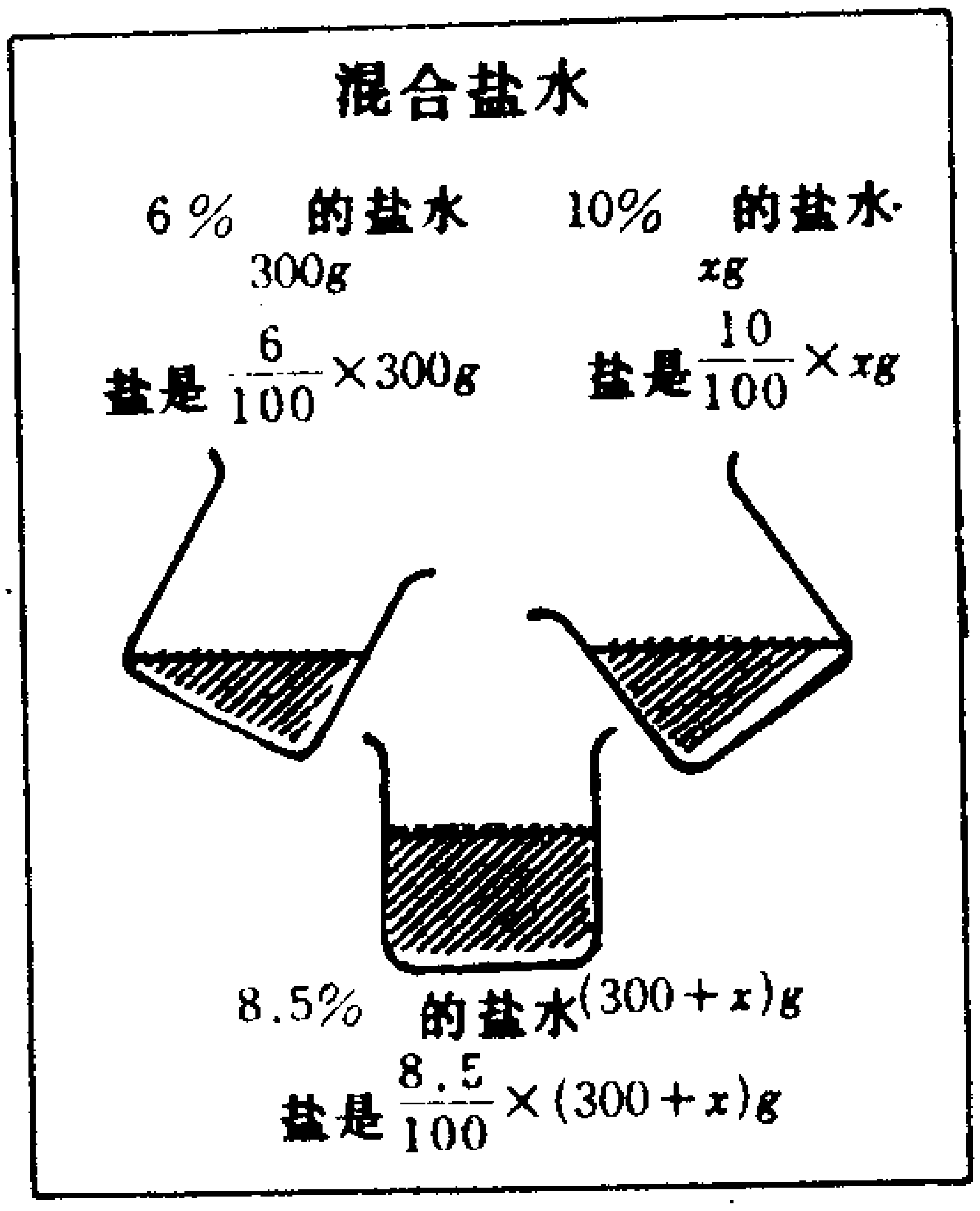


图9

但是，（a）与（b）相加应与（c）相等。由此，就得到了所求的方程：

$$\frac{6}{100}\times 300+\frac{10}{100}\times x=\frac{8.5}{100}\times(300+x)$$

两边乘以100，得

$$6\times 300+10x=8.5(300+x)$$

$$1.5x=750 \qquad \therefore\ x=500$$

可知注入10%的盐水500 g，方程确实成立。

（答）500 g

如上例，解应用问题时，列方程是比较难的。怎样解应用问题，可归纳其步骤如下：

○确定什么是未知数。

○考虑什么是相等的量，什么不是，以后列出方程。

○解方程。

○由具体问题确定变域，考虑方程的解作为应用问题的答案是否合适。

【想一想】 1.解下列方程

（1）$5(x+3)-3(x-1)=6(5-x)$

（2）$5(x+3)-3x=2(x-6)$

2.平时以5 km／小时的速度从家出发步行到学校时，迟到10分钟。如果乘自行车以15km／小时的速度去学校时，则比平时早到校2分钟，问到学校的里数是多少？

【略　解】 1.（1）$\frac{3}{2}$（2）无解 2.设路程里数为x km

$\frac{x}{5}-\frac{2}{60}=\frac{x}{15}+\frac{10}{60}$ 解方程后得1.5 km

§3. 多变数的方程

进君和弟弟明君二人各有球若干个，两人的球合在一起是6个。此时，以□表示进君的球数，以◡表示明君的球数，则

⌴+∪=6 ……………………………………①

的关系式成立。把⌴和∪改写成字母，则为

$x+y=6$ ……………………………………②

因为往⌴与∪内添入的数是球的个数，所以变数 x，y 的变域可以看成

$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$Y=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$x+y=6$ 式中虽然含有两个变数，但是用任意数代入 x 和 y 也可能不是等式，但这也是方程。像这样的式子，把含有两个以上变数的方程叫做**多变数方程**。另外，由于把变数叫做元，所以像②这样的两个变数的一次（不含 x^2, xy, y^2 等）的方程叫做**二元一次方程**。

把数组代入①式的⌴和∪，是 1 和 1，1 和 2，……，3 和 4，……，6 和 6 这样的36种。x 是 2，y 是 4 的时候，如果写成（2、4），则这些数组能表示成

（1，1），（1，2），……，（2，4），……，（3，4）……，（6，1）（6，2），……，（6，6）

在这些数组中，例如(2，3)代入⌴和∪中，

$$2+3\neq 6$$

等式是不成立的。然而把（2，4）代入后，可以看出是成立的。　$2+4=6$

由于其它数组(1，5)，(3，3)，(4，2)，(5，1)代入也都成

立，所以方程的解是

（1，5），（2，4），（3，3），（4，2），（5，1）

可是在第69页的方程

$$x+y=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

中，变域X和Y是全体实数的集合时，因为什么样的实数代入 x，y 都可以，代入 x，y 的数组是无限多的。

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$x+y=6$ 的变域和解集合
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	解是
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(1,5),(2,4),(3,3)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,2),(5,1)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	

图10.

多变数方程的变域为全体实数的集合时，一般是不特别写出其变域的。

且看这时方程的解是什么样。

把②式变成

$$y=6-x$$

的形式后，每当把不同实数代入 x 后，就确定了一个不同的代入 y 的实数。但是 x 可代入无限多个实数，因此由这个方程可以求出

（-2，8），（-1，7），（0，6），（0.5，5.5），（4，2），……（95，-89），（96，-90），……

这样的无限多个解（图11）。

变域是所有实数时，一般来说，多变数方程有无限多个解。

在下面研究变域是几个数的二变数二次方程（二元二次方程）的例子。

$y=6-x$ 的解

$\{(x, 6-x) \mid x$ 是实数$\}$

x 往 x 代入数

$(-2,8),(-1,7),(0,6)$

$(0.5,5.5),(4,2),(5,1)$

求出无限多个这样的数

图11

【例　题】 $X=\{-3, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ 　 $Y=\{\frac{1}{4}, 1, 2, 4\}$

解出方程 　 $x^2-y=0$

（解） 变形为 $y=x^2$，把X的元素代入 x。

把 -3 代入 x，得 　 $y=(-3)^2=9$

把 $\frac{1}{2}$ 代入 x，得 　 $y=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

把 1 代入 x，得 　 $y=1^2=1$

把 2 代入 x，得 　 $y=2^2=4$

因为 $Y=\{\frac{1}{4}, 1, 2, 4\}$，所以

解是 　 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，$(1, 1)$，$(2, 4)$

【想一想】 1.列出下面各题的方程。

（1）二边的长为 x 及 y 的矩形，它的面积为36。

（2）用 300 日元买来40日元一个的苹果 x 个，和20日元一个的柿子 y 个。

（3）有个位数为 x，10位数为 y 的两位数，把10位数和个位数调换后所得的数，比原数大27。

2. $X=\{1, 2, 3\}$，$Y=\{1, 2, 3\}$时，解方程

$$x-2y=-1$$

【略 解】 1.（1）$xy=36$，（2）$40x+20y=300$，

（3）$x+10y+27=10x+y$

2.（1，1），（3，2）

§ 4. 联立方程

（1） 联立方程

如前节开头所说的，进君和他的弟弟明君共有 6 个球时，如以 x 表示进君的球数，以 y 表示明君的球数，可得方程

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

但是这方程有

（1，5），（2，4），（3，3），（4，2），（5，1）

等五个解，但仅仅知道这个，还不清楚每人究竟有几个球。

但如果进一步还知道，进的球数比明的球数多 2，则可

得到方程

$$x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

这个式子变数 x，y 的变域也和前面的相同，为X＝{1,2，3，4，5，6}，Y＝{1，2，3，4，5，6}。

在这个变域中去研究方程②，由于知道 x 比 y 大 2，可知有四个解。

（6，4），（5，3），（4，2），（3，1）

这样一来，由于方程①的解是五个，方程②的解是四个，但是使①，②两者都成立的解是它们的交集，只是（4，2）。

把方程①和②放在一起考虑，求使两个方程都成立的解时，像

$$\begin{cases} x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

这样，把方程用括号连结在一起，叫做变数为 x，y 的联立方程。于是这个联立方程的解是（4，2）。

下面再考察另外的例子：

「有一矩形，其周长为 27 cm，面积为44 cm^2。求此矩形各边的长。」

考虑这个问题时，设相邻二边的长度为 x cm 和

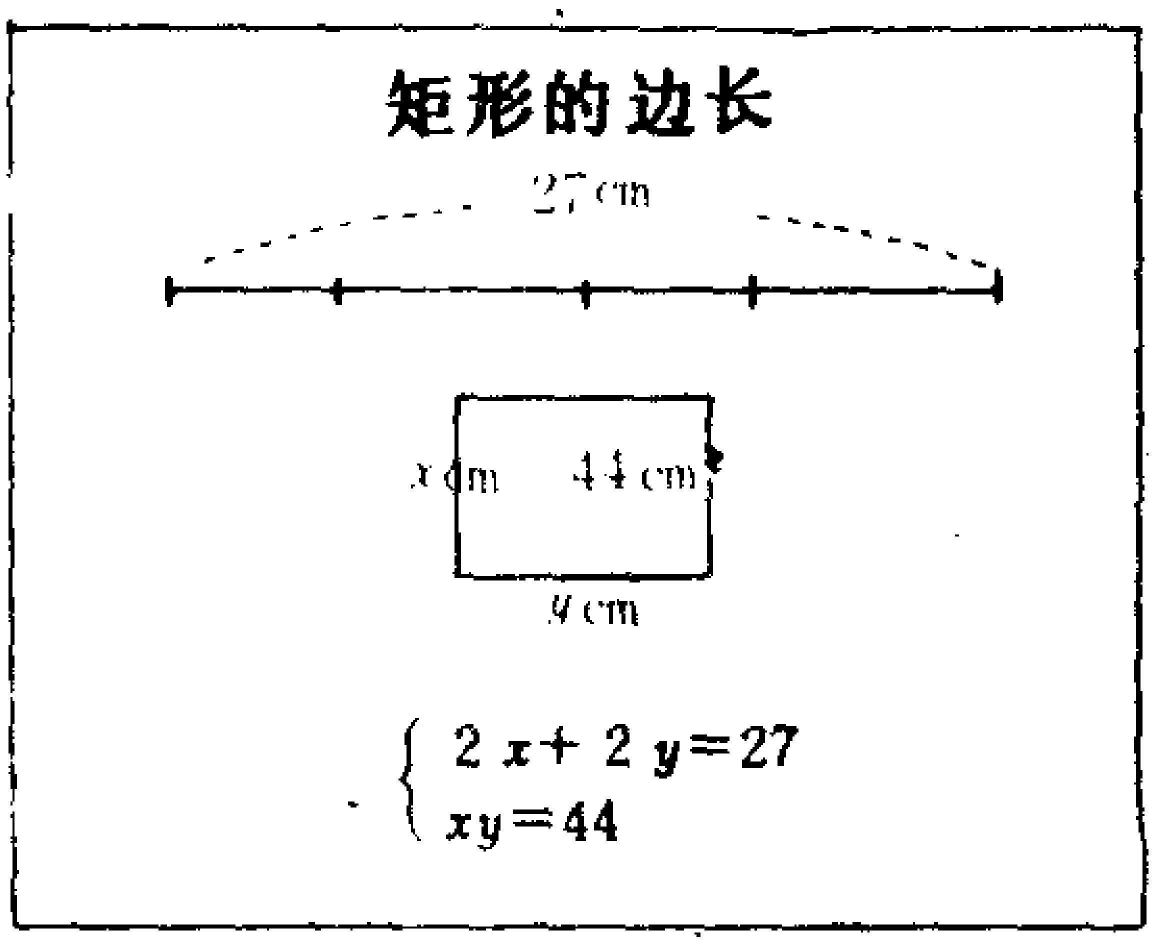


图12

y cm，可得联立方程

$$\begin{cases} 2x+2y=27 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ xy=44 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

在这里，x 和 y 的变域可以看作是小于13.5正实数（图12）。

在这里无论方程③或方程④的解都可以是无限多个。但是能满足③，④两者的解，可知只有（8，5.5）和（5.5，8）这两个。无论其中哪个，都是二边的长度为8cm和5.5cm。

一般地，联立方程的个数与变数的个数相等。因此，在只有变数 x，y 的时候，式子的个数为2，变数为 x，y，z 时，方程的个数必须是3。

解联立方程

$\{(x,y) \mid 2x+2y=27$ かつ $xy=44\}$

$=\{(x,y) \mid 2x+2y=27\} \cap \{(x,y) \mid xy=44\}$

$=\{(1,12.5),(2,11.5),\cdots (5.5,8),\cdots,(8,5.5),\cdots\}$

$\cap \{(1,44),(2,22),(4,11),\cdots,(5.5,8),\cdots,(8,5.5),\cdots\}$

$=\{(5.5,8),(8,5.5)\}$

图13

此外，所谓解联立方程，就是求出使其中所有方程都成立的解。换句话说，就是求出每个方程解的交集（图13）。前页的联立方程①②有 x，y 两个变数，两个都是一次方程，这样的方程叫做**二元一次联立方程**。

【想一想】 进君和他父亲的年令之差为28，在16年后，父亲年令为进君年令的2倍。现在设进君和父亲的年令分别

为x和y，试列出联立方程。

【略　解】　$x+28=y$，　$2(x+16)=y+16$

（2）　联立方程的解法

在联立方程中，可按变数的个数分为二元联立方程和三元联立方程等。在这里，我们研究两个变数，而且两个都是一次的二元一次联立方程的解法。

x，y的变域是实数集时，方程

$$\begin{cases} 3x-2y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ 2x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

怎样去解它才好呢？

解一个变数的一次方程时，用作方程的同解变形（第64页）的方法。所谓同解变形是

- ○从一边把数或式子移到另一边
- ○两边乘以非零的同一数
- ○两边除以非零的同一数

解联立方程也用同解变形。

为了解上面的联立方程③，④，把

$$2x+y=4$$

作同解变形，得

$y=4-2x \cdots\cdots ④'$　$4x+2y=8 \cdots\cdots ④''$

④，④′，④″的解是相同的。

因而，代替解③，④的联立方程，可解

a. $\begin{cases} 3x-2y=-1 & \cdots\cdots ③ \\ y=4-2x & \cdots\cdots ④' \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x-2y=-1 & \cdots\cdots ③ \\ 4x+2y=8 & \cdots\cdots ④'' \end{cases}$

哪一个都可以。

可是，就a而论，由于在④′中$y=4-2x$，把$4-2x$代入③的y中，得

$$3x-2(4-2y)=-1$$

整理后，则得

$$x=1$$

因此，把1代入④′的x时，则由

$$y=4-2\times1=2$$

y也被确定了。

其次，再讨论b。

把方程③和④″的两边的左边与左边相加，右边与右边相加，得

$$3x-2y+4x+2y=7$$

由此得

$$x=1$$

因此，将1代入④″的x，得

$$4\times1+2y=8$$

由此得

$$y=2$$

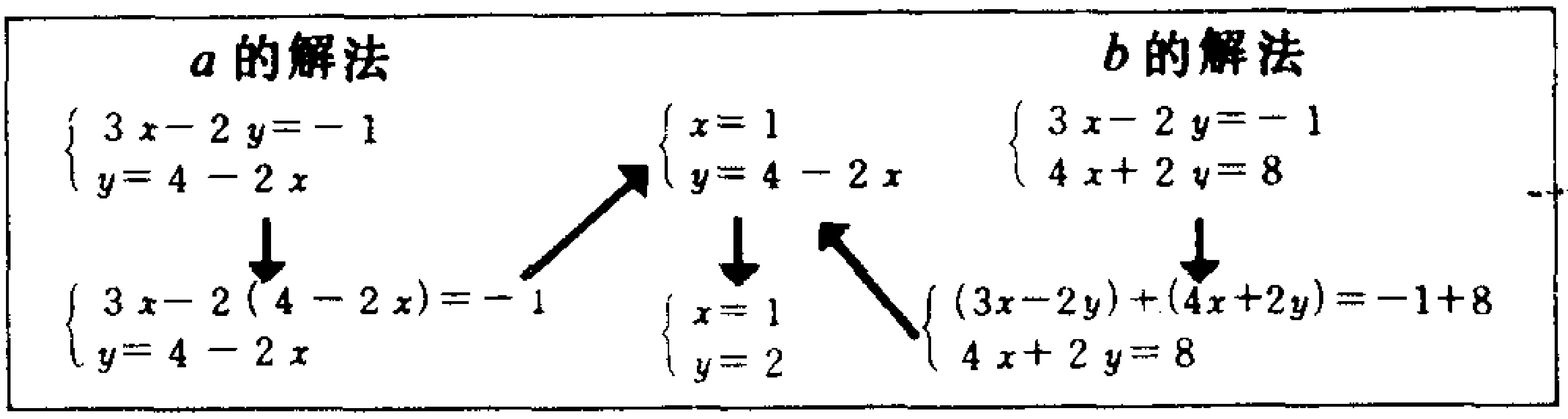


图14

y 也确定了。

这样，由 a，b 两者可得出 $x=1$，$y=2$。于是把(1，2)代入最初的联立方程③，④，使二式

$$\begin{cases}3\times\boxed{1}-2\times\boxed{2}=-1\\2\times\boxed{1}+\boxed{2}=4\end{cases}$$

都成为等式，可知（1，2）是解。

用上面的 a，b 两种方法，都可以得到解。怎样用这些方法求到解的？

那就是，在 a 的变形中，

把 $4-2x$ 代入③的 y

另外，在 b 的变形中，

把③，④式的两边相加。

因为这两个解联立方程常使用的变形，也还是同解变形。

总而言之，可得出下面的结论。

○把一个方程的一个变数表成另一个变数的形式，用这个把另一方程代换所得的方程，与原方程是同解的。

例如

$$\begin{cases}3x-2y=-1\\ y=4-2x\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-2(4-2x)=-1\\ y=4-2x\end{cases}$$

是同解的。

○两个方程的两边分别相加所得的方程，与原方程中的一个组成的方程，和原方程是同解的。

例如

$$\begin{cases}3x-2y=-1\\ 4x+2y=8\end{cases}\qquad\begin{cases}(3x-2y)+(4x+2y)=-1+8\\ 4x+2y=8\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-2y=-1\\ (3x-2y)+(4x+2y)=-1+8\end{cases}$$

是同解的。

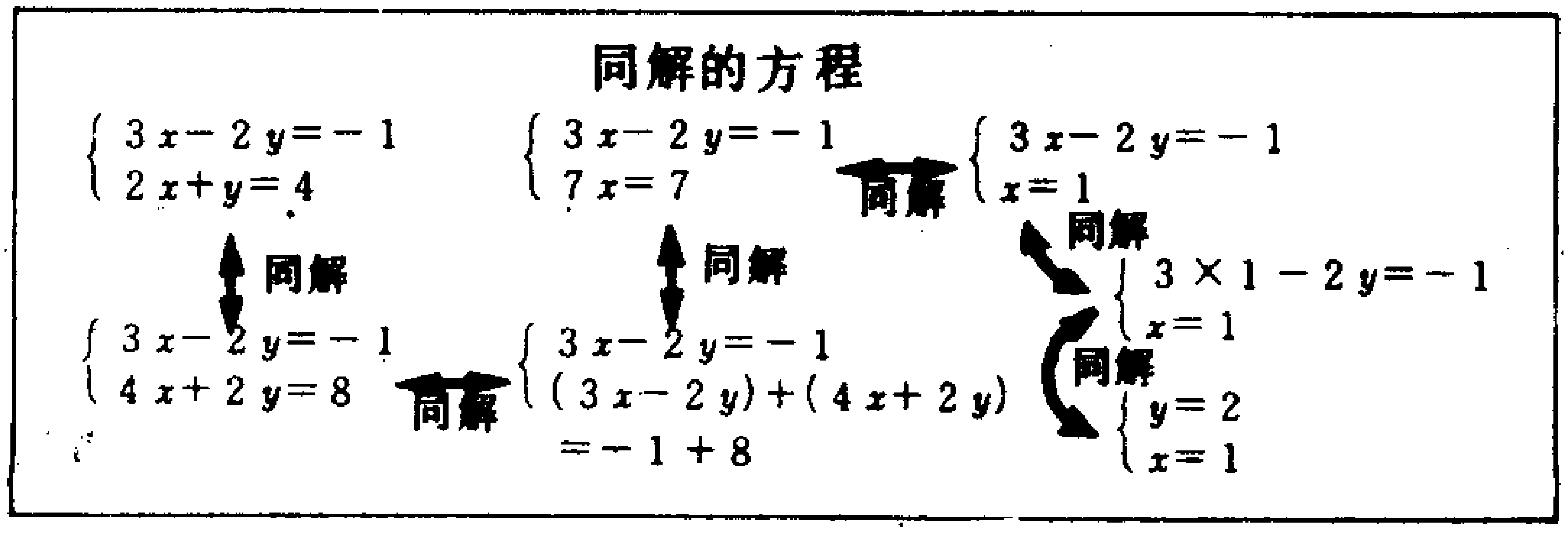


图15

解联立方程时，就这样使用方程的同解变形，逐步地把方程作稍许变形，导出下面形式的方程即可。

$$\begin{cases} x = \square \\ y = \bigcirc \end{cases}$$

下面，举例说明这种解法。

【例题 1】

买 3 个苹果和 2 个梨，其价钱为 195 日元，买 1 个苹果和 4 个梨的价钱为 215 日元。问苹果和梨每一个的价钱是多少（图 16）。

（解）设 1 个苹果的价钱为 x 日元，1 个梨的价钱为 y 日元，可得联立方程

$$\begin{cases} 3x + 2y = 195 \\ x + 4y = 215 \end{cases}$$

依次地作出同解变形，

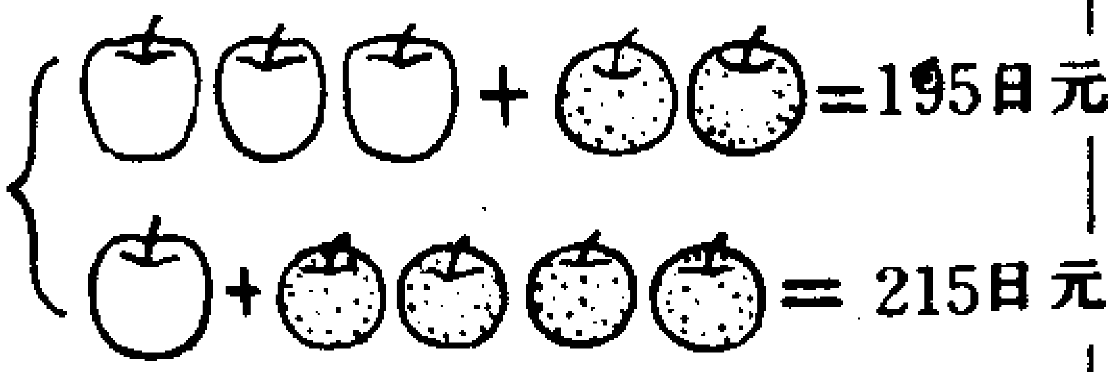
$$\begin{cases} -6x - 4y = -390 \\ \quad x + 4y = 215 \end{cases}$$

（将上式 −2 倍）

$$\begin{cases} -5x = -175 \\ x + 4y = 215 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 35 \\ x + 4y = 215 \end{cases}$$

卖苹果和梨



苹果一个价值为 □日元

梨一个价值为 ○日元

とすると

$$\begin{cases} 3 \times \square + 2 \times \bigcirc = 195 \\ \square + 4 \times \bigcirc = 215 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 195 \\ x + 4y = 215 \end{cases}$$

图16

（两式相加）　　　　（上式除以－5）

$$\begin{cases} x=35 \\ 35+4y=315 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=35 \\ y=45 \end{cases}$$

（下式的 x 以35代入）

从最后面的方程得到的解是（35，45）

（答）　苹果35日元，梨45日元。

解联立方程时，如解第77页的 a 那样，把一个方程的 y 用 x 表出（或者把 x 用 y 表出），然后把它代入另一方程中的 y（或 x）的解法，叫做**代入法**。另外，如解 b 时那样，一个方程几倍后，把两个方程相加或相减的解法叫做**加减法**。

上面的【例题 1】是用加减法解出的，但是因为在这个例题中写法是很麻烦的，一般用加减法和代入法求解时，是按下面那样方式书写的。

【例题 2】

按加减法和代入法解联立方程

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤} \\ 4x+3y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑥} \end{cases}$$

（解）　<u>加减法</u>

⑤×3　　$9x+6y=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤′

⑥×（－2）　　$-8x-6y=-14 \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑥′

⑤′＋⑥′　　$x=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑦

把⑦代入⑤　　$3\times(-2)+2y=4$

$\therefore \quad y=5$ （答） （−2，5）

<u>代入法</u>

由⑤式 $y=2-\frac{3}{2}x$ ……………………………⑤″

把⑤″代入⑥得，$4x+3(2-\frac{3}{2}x)=7$

$\therefore \quad x=-2$

把⑦代入⑤″ $y=2-\frac{3}{2}\times(-2)=5$

（答） （−2，5）

联立方程的解通常不写作（−2，5），而写作 $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$。这个是同解变形时最后的方程。

【想一想】 解下面联立方程

（1）$\begin{cases}4x-3y=6\\2x+5y=16\end{cases}$ （2）$\begin{cases}3x=5y+2\\2x=6y+3\end{cases}$

【略 解】 （1） （3，2） （2） $(-\frac{3}{8},-\frac{5}{8})$

（3） 三元一次联立方程

有A，B，C三种量杯，将A，B两满杯水都注入一容器内，再吸出C的一满杯水，则剩下4l 水。

如注入B1杯，C2杯，再吸出A1杯，剩有1l 水，如注入A3杯，C1杯，吸出B2杯，剩有6l 水（图17）。

虽然在实际中好像没有这样的问题，设A，B，C三个量杯的装水数量分别为$x\,l$，$y\,l$，$z\,l$，可以得到**三元一次联立方程。**

$$\begin{cases} x+y-z=4 & \cdots ⑧ \\ -x+y+2z=1 & \cdots ⑨ \\ 3x-2y+z=6 & \cdots ⑩ \end{cases}$$

这种解法像下一页那样，把⑧和⑨，⑧和⑩组合后作出不含有y的二元一次联立方程，从中解出x和z，再求y即可。

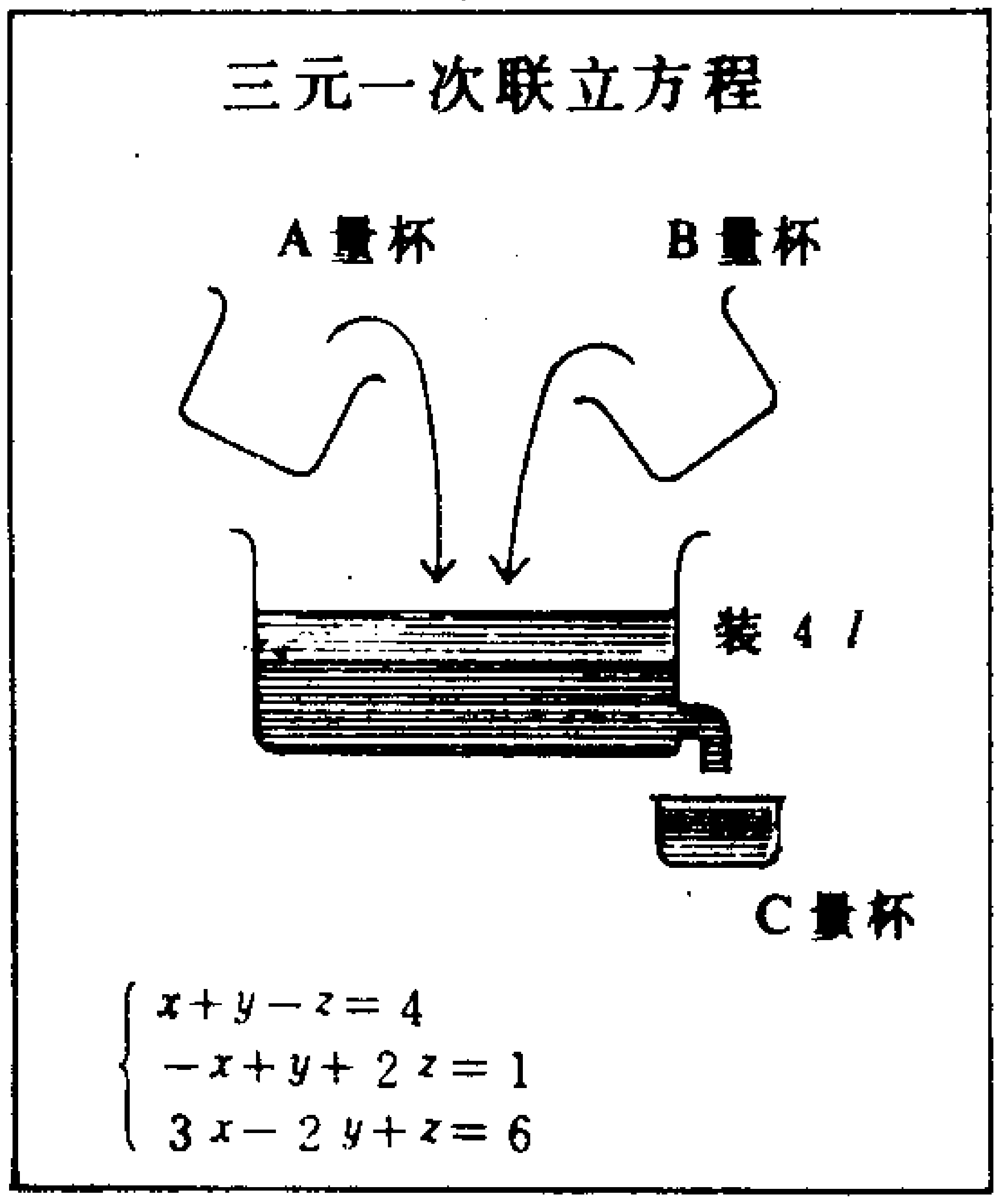


图17

⑧×2　$2x+2y-2z=8$ ⋯⑧′

⑧−⑨　$2x-3z=3$ ⋯⋯⋯⋯ ⑪ ⎫ 不含y的式子

⑧′+⑩　$5x-z=14$ ⋯⋯⋯⋯ ⑫ ⎭

⑫×（−3）　$-15x+3z=-42$ ⋯⋯⋯⋯ ⑫′

⑪+⑫′　$-13x=-39$

$\therefore\ x=3$ ⋯⋯⋯⋯ ⑬

把⑬代入⑫，　$2\times3-3z=3$

$\therefore\ z=1$ ⋯⋯⋯⋯ ⑭

把⑬，⑭代入⑧　　$3+y-1=4$

$$\therefore y=2$$

所以这个方程的解是（3，2，1）。

这个解也不写成（3，2，1），通常写作

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

【想一想】　解下列联立方程

（1）$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-2y+3z=1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=8 \\ z+x=6 \end{cases}$

【略　解】　（1）（2，0，−1）　（2）（1，3，5）

§5. 方程与图象

（1）　坐　标

因为走路时忽然下了大雨，想让家里的人拿伞来迎接。在电话里向家人请求，说

「我在一道街拐角处的书店里」

或者说

「我在汽车站向家的方向，大致在100 m的地方」

像所说的那样，用街道上的目标告知自己的所在位置，使家人容易了解。

在直线上有P，Q，R等几个点时，要把它们的位置表示出来．不确定一个基点，表示点的位置是不可能的。

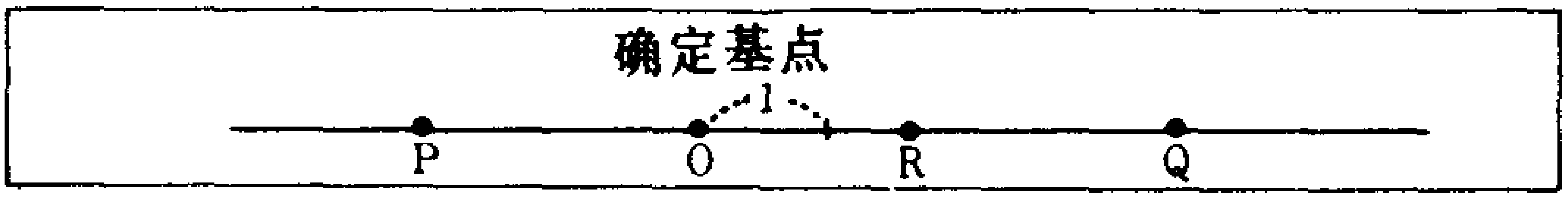


图18

所以，在直线上确定一点O，把O叫做原点。O是表示数0的点。确定相当于1的长度。

这样作过之后，如同在第二章§1（参看第30页）讲的那样，可以把直线看作数轴，所以直线上的点都能用实数表示。

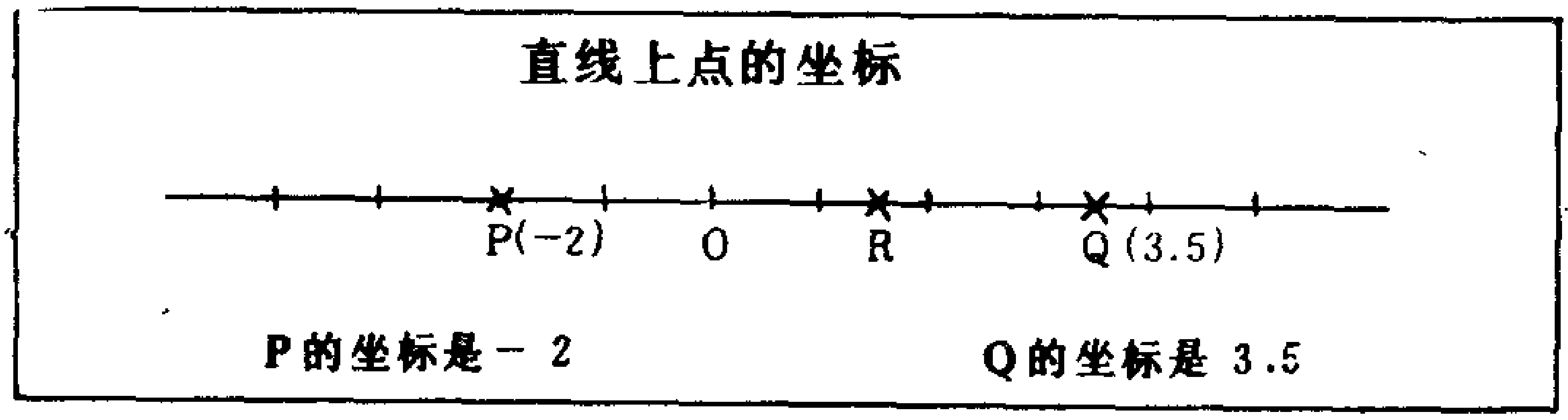


图19

在这个数轴上，如图19，点P是表示－2的点时，写作P（－2），说－2是点P的坐标。在这个图里，因为点Q是表示3.5的点，可以写成Q（3.5）。

这样，把直线作为数轴考虑时，在直线上往一点P的位置，能用一个实数a如P（a）那样表示。相反地，如果用一

个实数表示坐标时，被那个数表示的点马上就可找到。

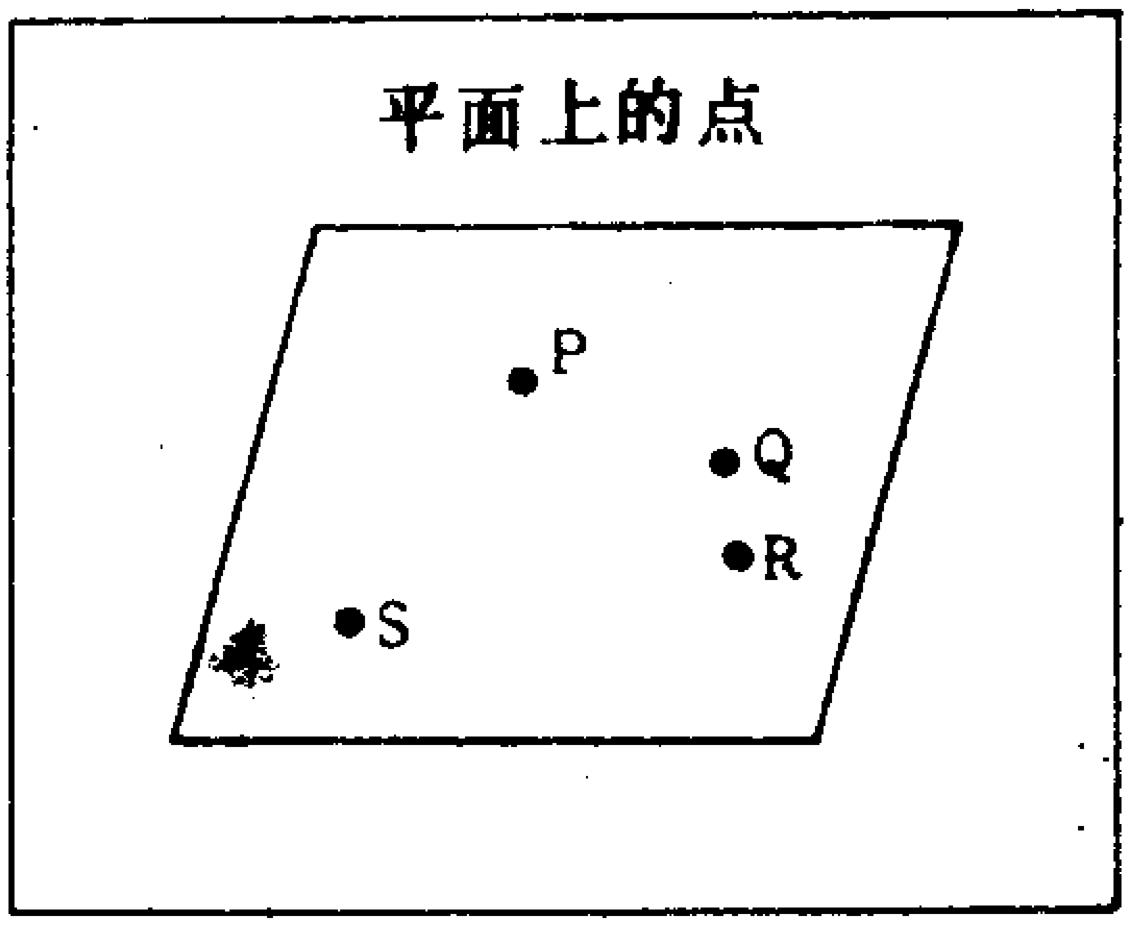


图20

这次如图20，我们来考虑在平面内有几个点，为了准确表示各个点的位置，应该用什么方法呢？

在札幌和京都等市街上，街道都是棋盘那样南北向和东西向的。而且，例如在札幌市，把地名表示为

“北○条东□道街”

这样的说法。因此，只要听到那个地名，立刻就能明确在哪个地方（图21）。

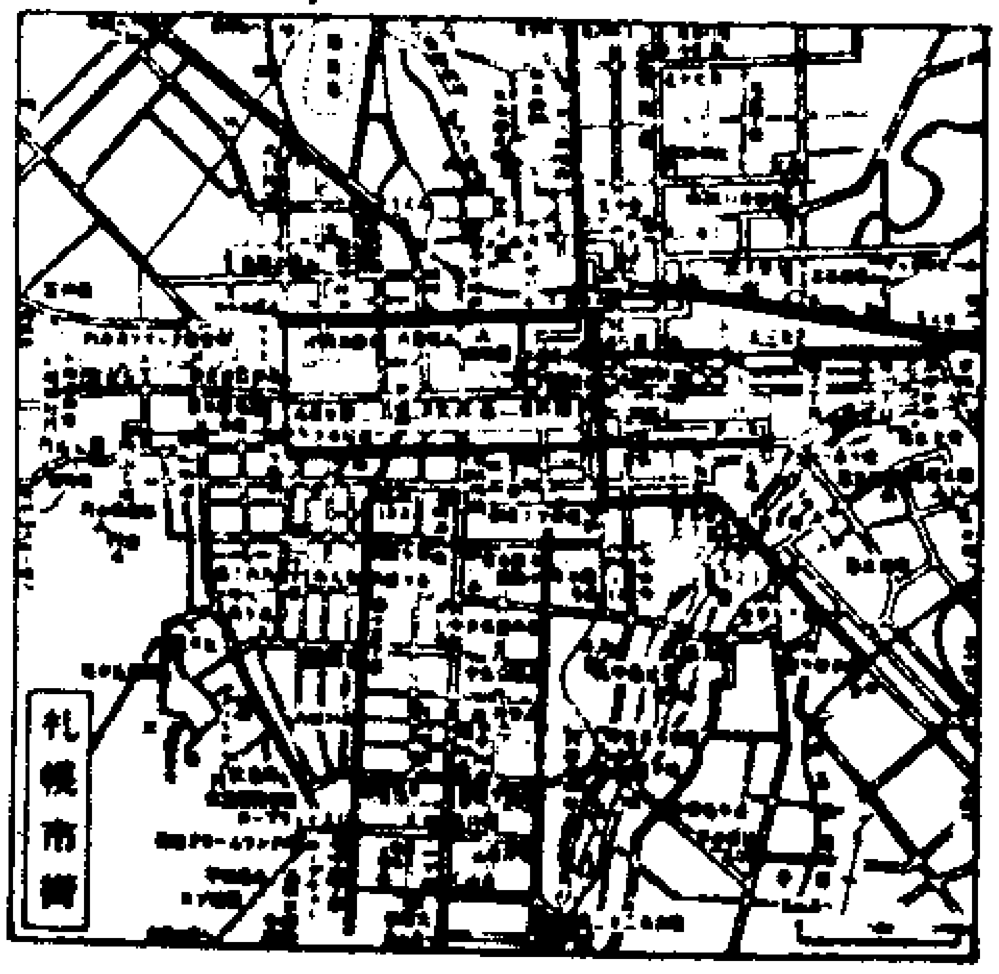


图21

在数学中，表示平面上点的位置的方法，也和这个非常相似，如图22，作出两条垂直相交的直线，设其交点为O。这两条直线作为基准的直线，被称为坐标轴，分别命名为x轴，y轴。另外把点O叫做原点。

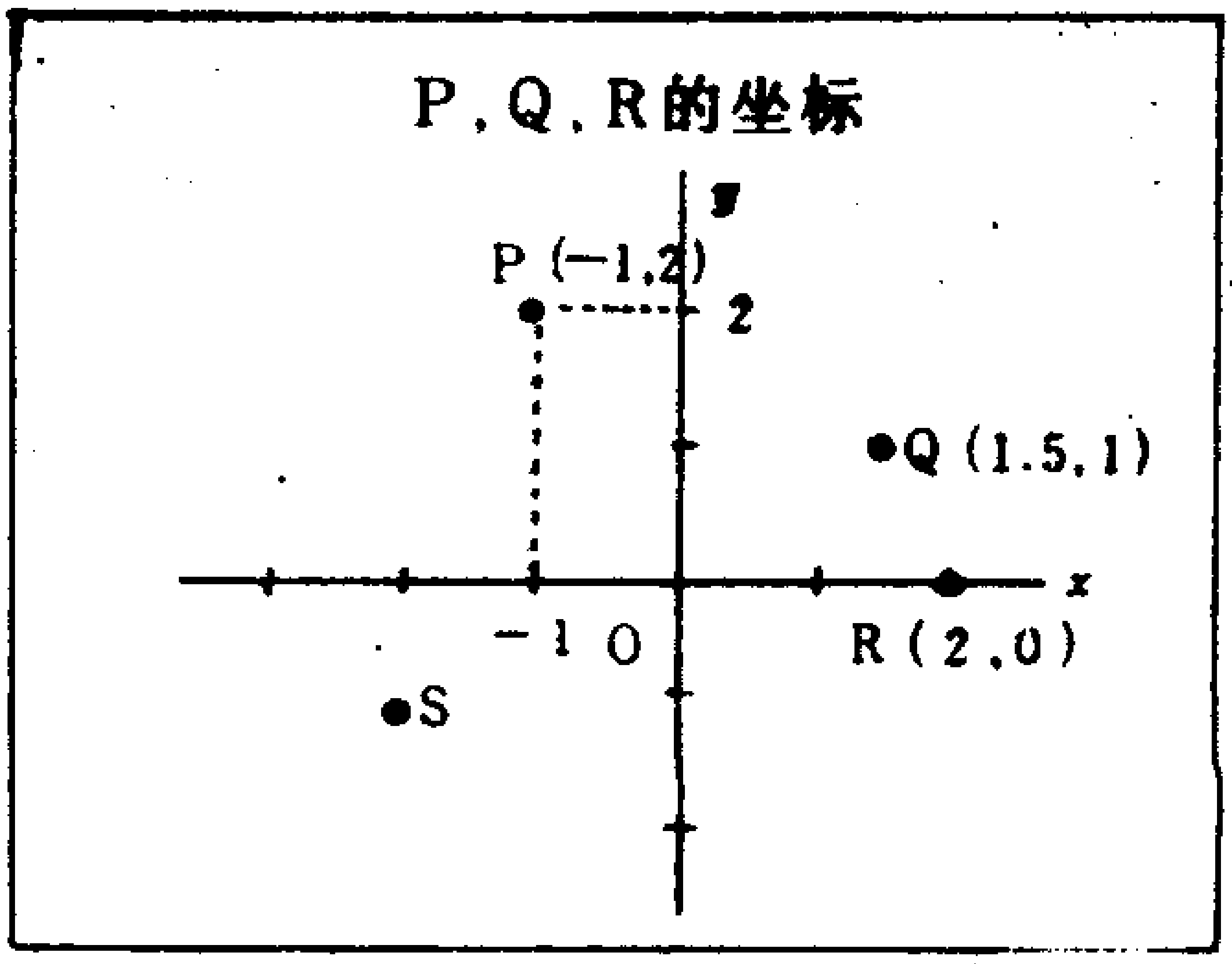


图22

x 轴和 y 轴，两者都是以O为原点的数轴。

而且，在 x 轴上规定从原点往右的数为正，在 y 轴上从原点往上的数为正。并且，一般来说在 x 轴和 y 轴上，取 1 的长度都是相等的。

这样，把 x 轴，y 轴看成数轴，从平面上的点 P向 x 轴和 y 轴引垂线看一看。

在图22上，从 P向 x 轴，y 轴上引垂线在 x 轴 y 轴上的交点，分别用 -1和 2 来表示。此时说点 P的坐标为（-1，2）写作P（-1，2）。并且也说点 P的 x 坐标为-1，y 坐标为 2 。

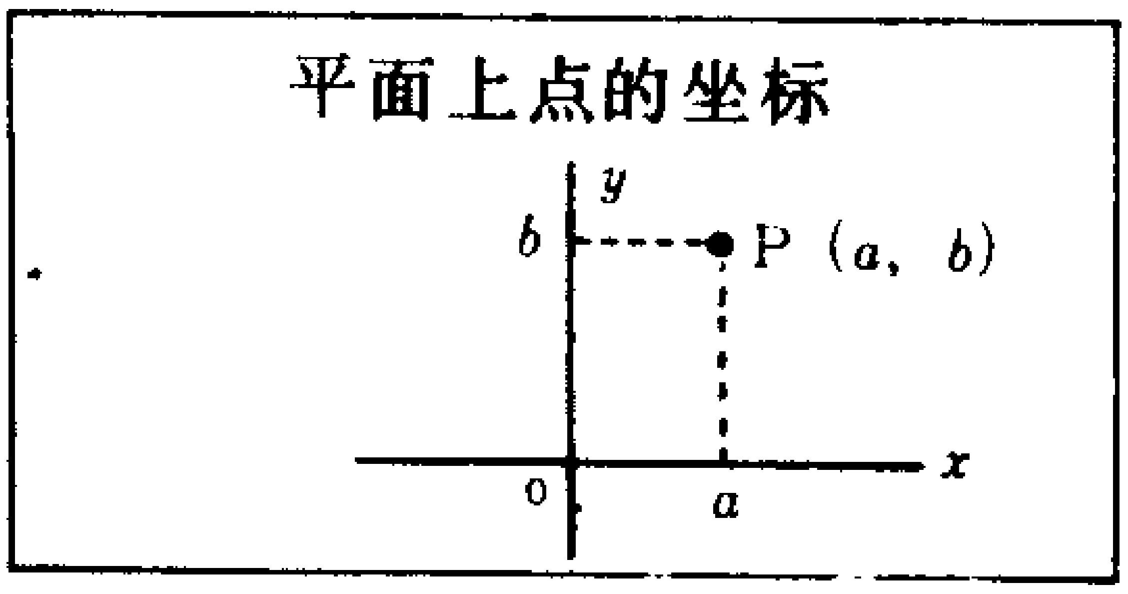


图23

在图22上，Q被表示为Q（1.5，1），x 轴上的 R 被表示为R（2，0）。

这样，在平面上的点 P，当垂直相交的二直线被定为坐标轴时，就能表成形如P（a，b）的一组两个实数a，b构成的数组（图23）。

【想一想】 自己画出坐标系，并画出下列各点。

A（1，-3），B（0，$\frac{8}{3}$），C（-4，-6），D（5，$\frac{3}{2}$）

（2） 方程和图象

x 和 y 的变域为实数集时，二元一次方程

$$x+y=2$$

有如下的无限多个解

(−1, 3), (0, 2), (0.5, 1.5),(1,1),

(1.4,0.6), (2, 0), (2.3, −0.3), (3, −1),

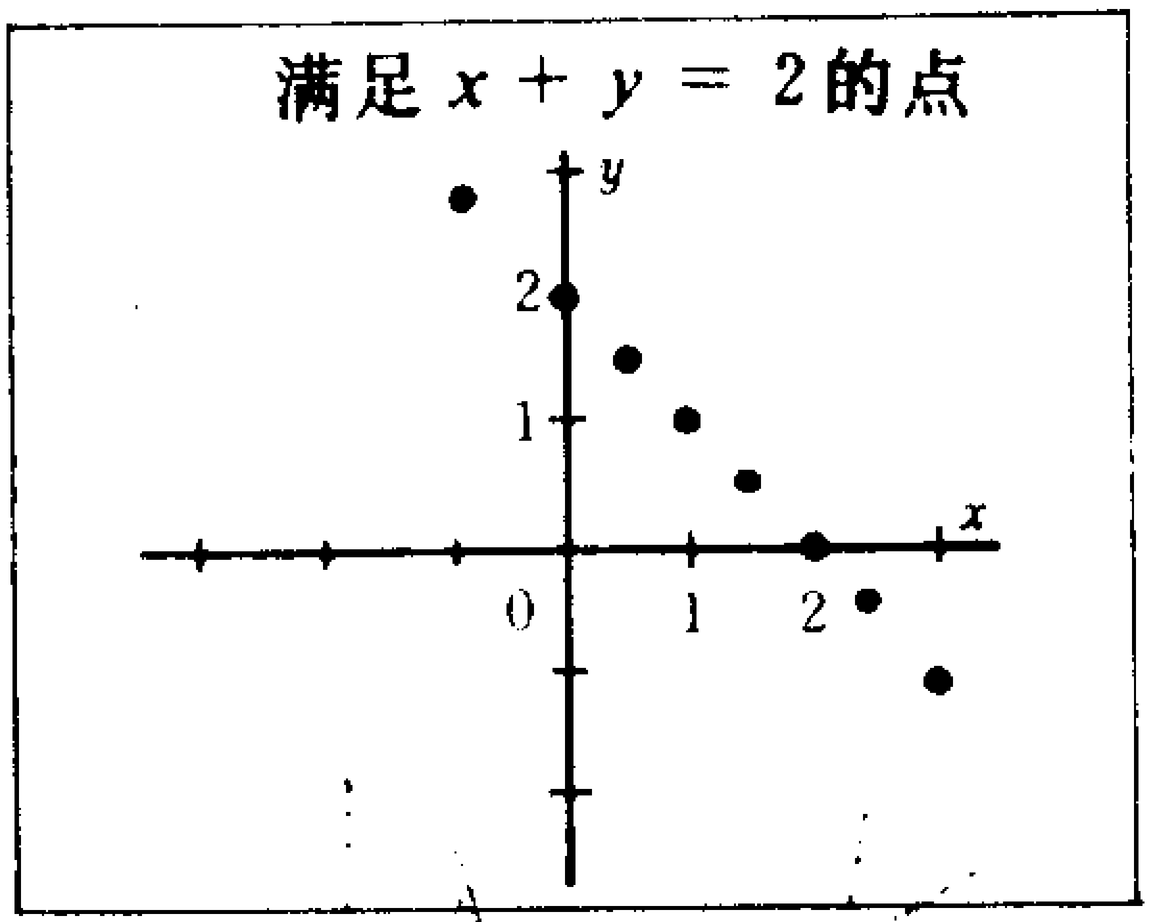


图 24

把这些解看作点的坐标，在平面上取出（−1，3)，(0,2)，(0,5)，(0.5，1.5)……考察一下。这些点如图24中，虽然不是互助连接着，但是像在一条直线上那样笔直地排列着。

在图24中，点所以不连接，原因是只选择了方程

$$x+y=2$$

的几个解。

因为 x 和 y 可以取任意数值，例如考虑在（0.5,1.5）和（1，1）之间可以取

(0.6, 1.4),(0.61, 0.39),(0.613, 0.387)……

这样无限个点的时候，这些点将密集地一个挨着一个连成一串。

于是，在平面内以 $x+y=2$ 的解为坐标的点集，如图25，是和 x 轴，y 轴相交于(2,0)和(0, 2) 的直线。把这条线叫做方程 $x+y=2$ 的图象

因为方程 $x+y=2$ 的图象是 $x+y=2$ 的解(x, y)

构成的点集，所以使用集合的符号可以表示成，

$\{(x, y) \mid x+y=2\}$

如此，变数 x，y 的方程，研究它的解集合时，在平面上就能画出它的图象。

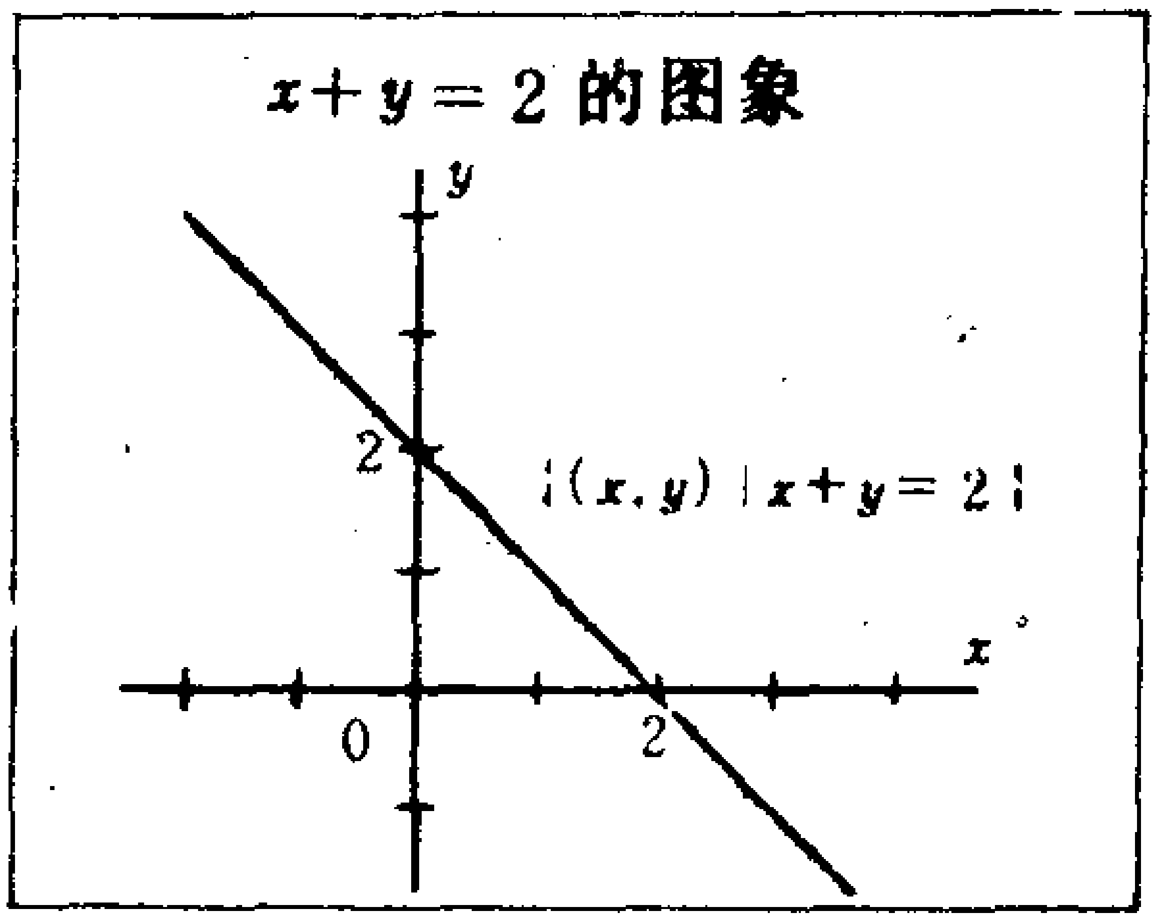


图25

图26就是

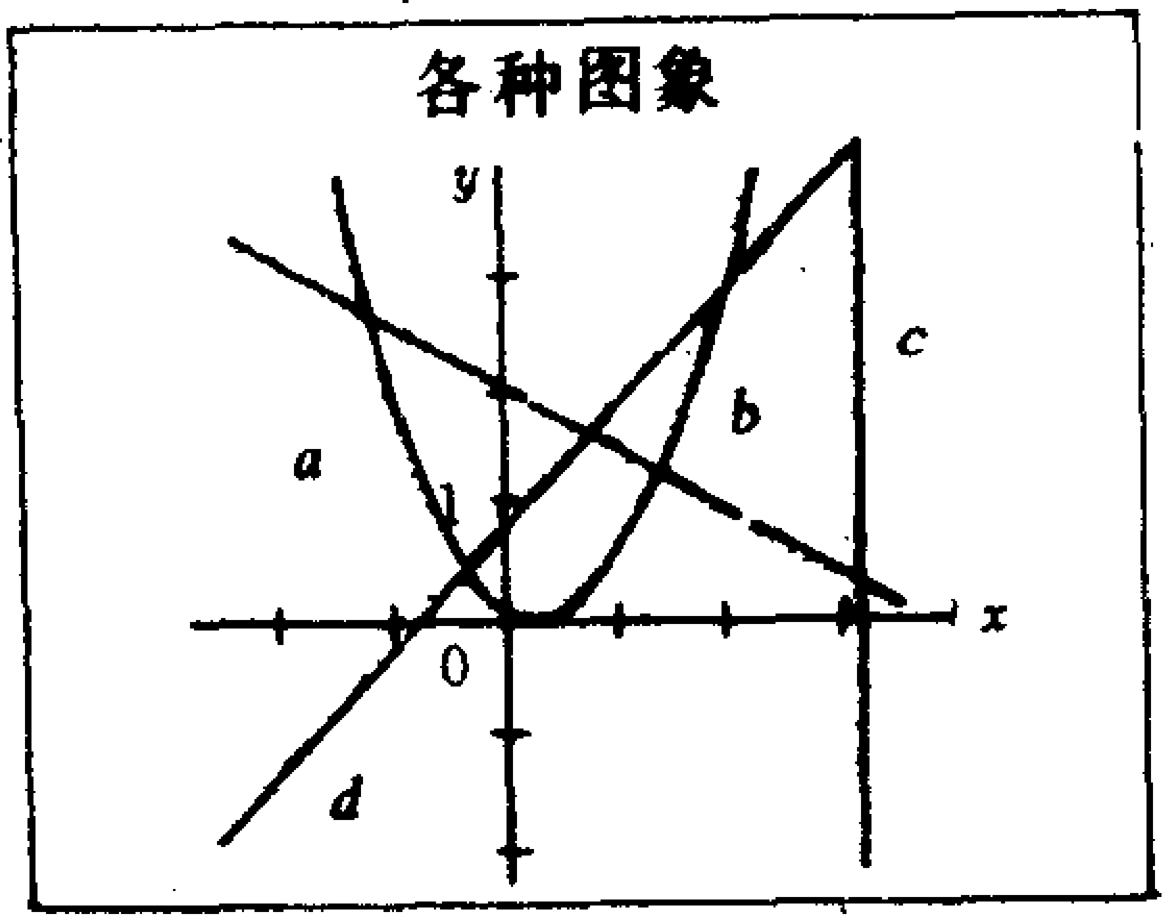


图26

（a）$x+2y=4$

（b）$y=x+1$

（c）$x=3$

（d）$x^2-y=0$

的图象。

$x=3$ 虽然是一个变数的方程，但 y 可以看作能取所有实数，它的解是这样(3，0)，(3，1)，(3，2)……，图象是平行于 y 轴的直线。

变数为 x，y 的二元一次方程的图象是平面上的直线，反之，可知平面上的直线能用 x，y 的一次方程表示。因此画一次方程的图象时，求出二点后，画出通过此二点的直线即可。

变域是由有限个数构成时，图象也是由几个点画成的。

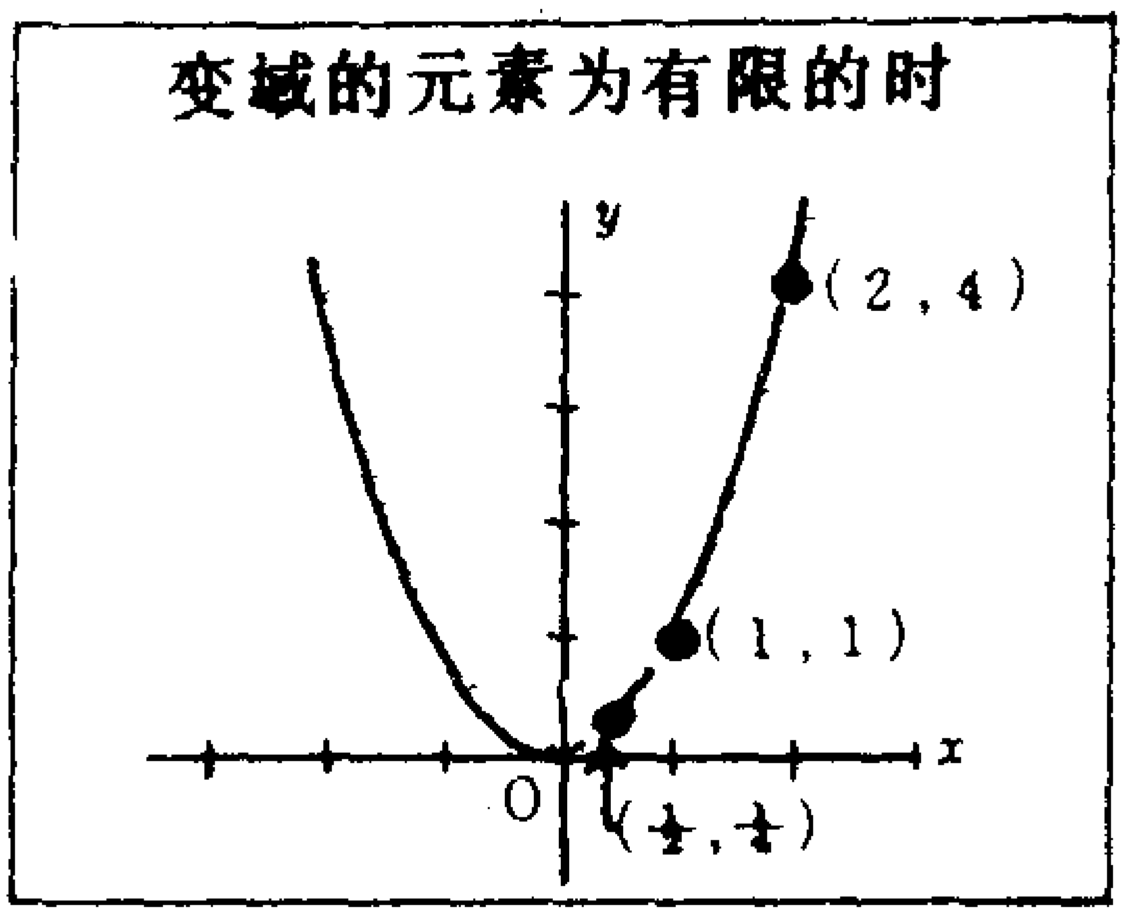


图27

例如，$X=\{-3,\frac{1}{2},1,2\}$，

$Y=\{\frac{1}{4},1,2,4\}$时

（在第72页例题中已经计过），方程$x^2-y=0$的解为

$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，(1，1)，(2，4)，

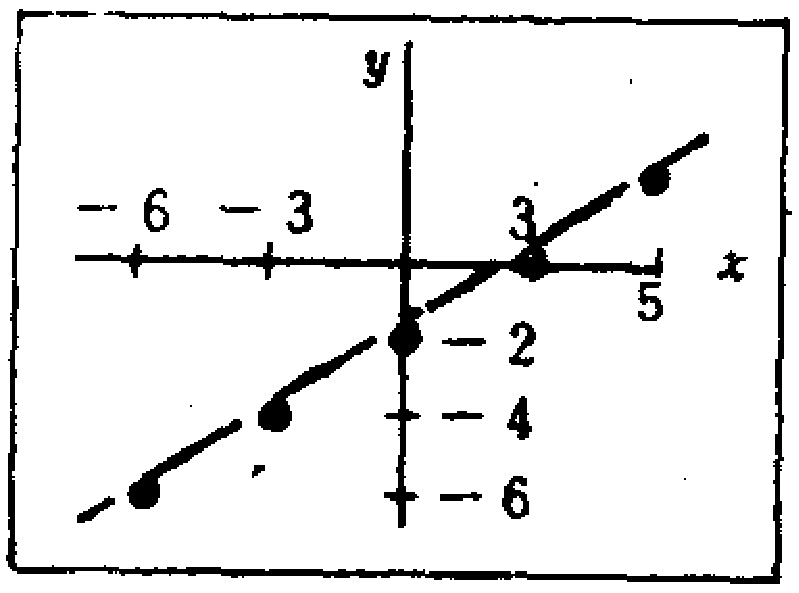
因此它的图象如图27，为三个点的集合，它是在$x^2-y=0$的图象上（图27）。变域为实数集，

$x^2-y=0$的图象是叫做**抛物线**的曲线。

【想一想】 1　方程　$2x-3y-6=0$上，存在点(x, y)时，填上下表，画出直线的图象。

【略　解】

x	−6	−3			5
y			−2	0	



（3）　图象和方程的解

一次方程

在

$3x+3=5x-1$ ……………………………………①

中，把左边的 $3x$ 和3，移项到右边后整理，能得到如下方程

$$0=2x-4 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

毫无疑问①和②是同解（解相同）方程。

现在，把方程②左边的0换成 y，作出下面这样的式子进行考察

$$y=2x-4 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

这个③的图象，因为它是一次方程的图象，所以是直线，画出它的图象如图28。

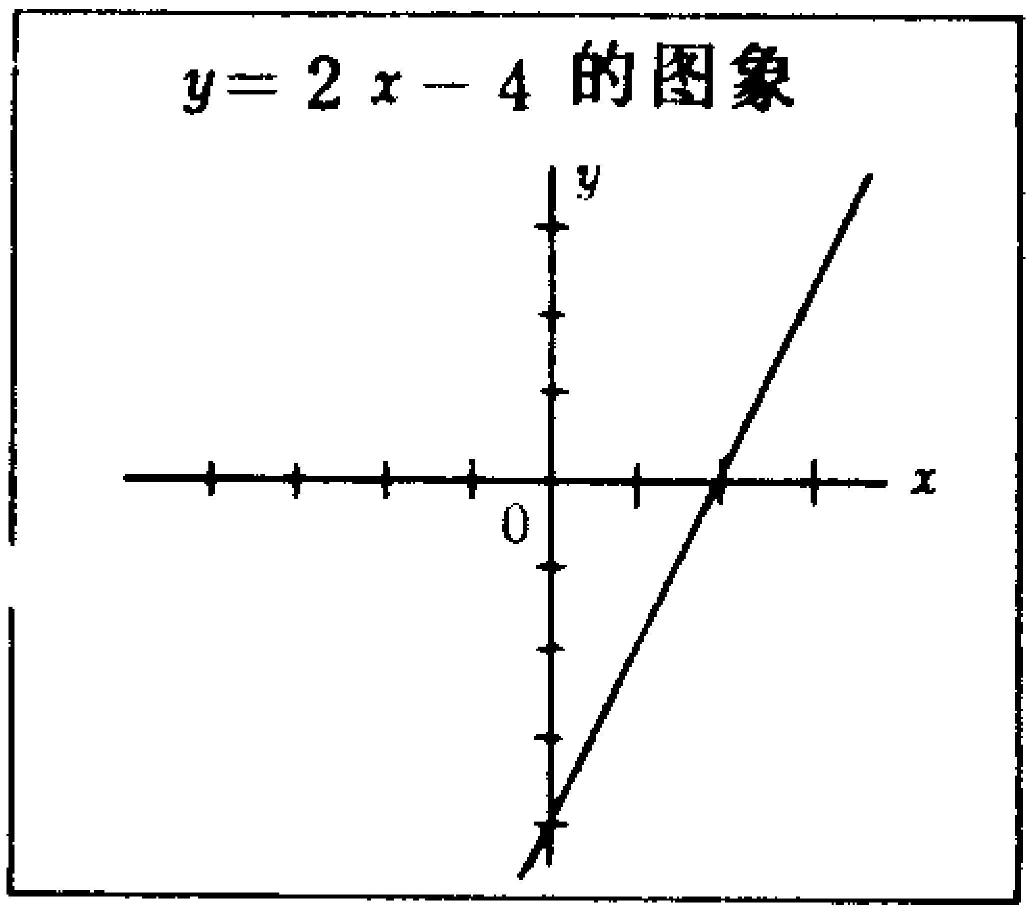


图28

这个图象和 x 轴相交，所谓和 x 轴相交，就是在 $y=2x-4$ 中，y 的值等于0

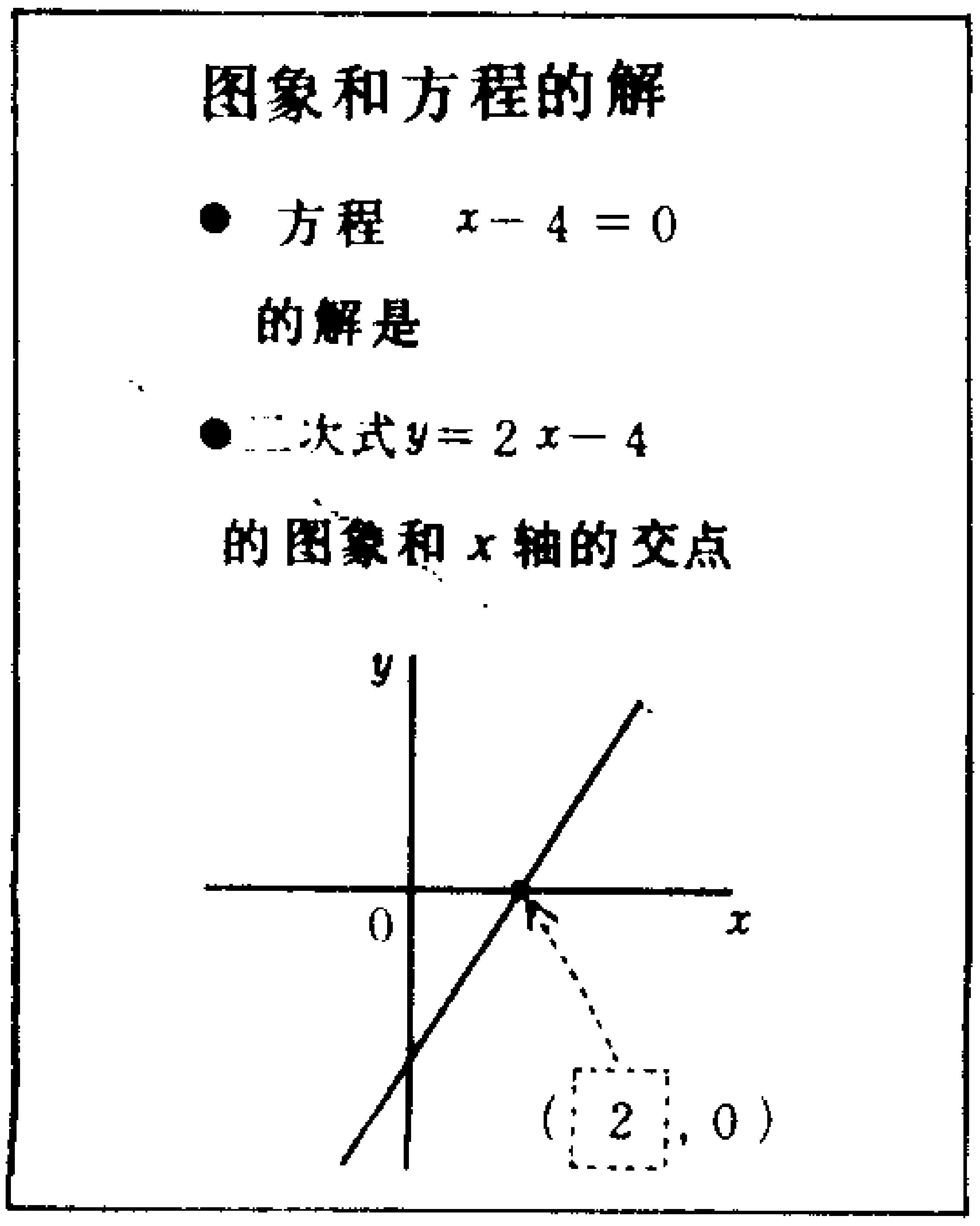


图29

因此，③的图象与 x 轴相交时，交点的 x 坐标是把③式的 y 取作0，解方程

$$2x-4=0$$

即可求得。相反地，$2x-4=0$ 的解是 $y=2x-4$ 的图象和 x 轴交点的 x 坐标。

实际上，$y=2x-4$ 的图象与 x 轴的交点为（2，0），另外，方程

$$2x-4=0$$

的解也是2，可知它们确实是相同的（图29）。

因此，$y=\square x+\triangle$的图象和 x 轴交点的 x 坐标，等于方程

$$\square x+\triangle=0$$

的解。

所以，图象和 x 轴交点的坐标，把 y 取为零的方程解出后即可得到。相反地，如果正确地画出图象，从此图象上就可以求出方程的解。

【想一想】 求出下列各图象和 x 轴的交点坐标。

（1）$y=-\frac{1}{3}x+2$ （2）$3y+5x-11=0$ （3）$x=-2$

【略　解】 （1）（6，0）（2）（$\frac{11}{5}$，0）（3）（-2，0）

下面，将讨论二元一次联立方程的解和图象间的关系。二元一次联立方程

$$\begin{cases} x+2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④ \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

的解，是使④，⑤两者都成立的解。所以这个解集合是方程④的解集合与方程⑤的解集合的交集（参看第70页§4）。

把这一事实用图象来研究将是什么样呢？

因为④和⑤都是二元一次方程，它们的图象如图30那样为直线。设这两条直线为L，L′。

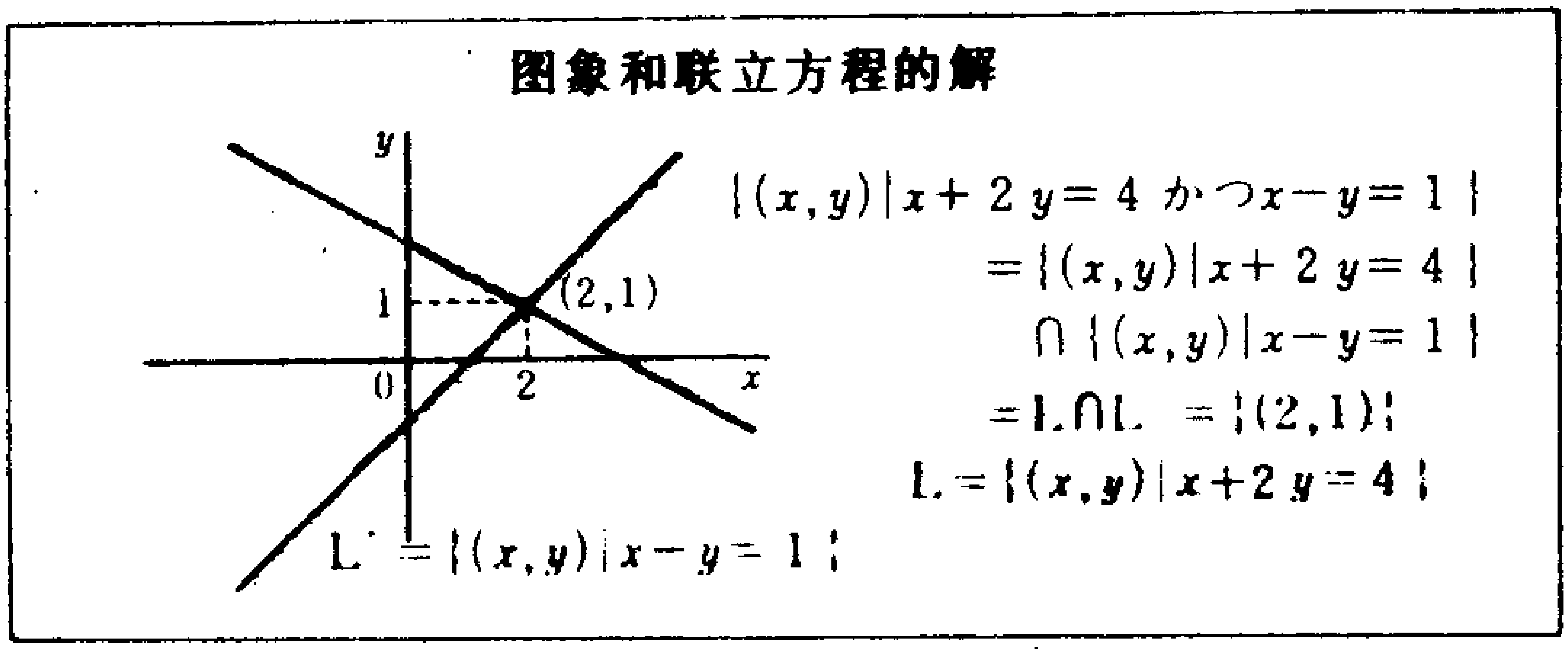


图30

L 是④的解集合的图象，L′ 是⑤的解集合的图象。

因为联立方程的解集合是④和⑤解集合的交集，像在第一章§3 研究过的那样，二直线L，L′ 的交集是二直线的交点，所以联立方程的解就是二直线L，L′ 的交点坐标了。

实际上，用加减法解联立方程④，⑤

$x+2y=4$ ……………………④

⑤×2　　$2x-2y=2$ ……………………⑤

④+⑤′　　$3x=6$　　$\therefore x=2$

代入④中　$2+2y=4$　$\therefore y=1$

得到解为（2，1）。可知④，⑤的图象二直线L，L′也如图 那样，准确地在点（2，1）处相交。

另外，解第90页的方程 $2x-4=0$ 时，因为可以看作是求联立方程

$$\begin{cases} y=2x-4 \\ y=0 \end{cases}$$

的解 x 的值。所以求直线 $y=2x-4$ 和 $y=0$ （x 轴）的交点即可。

如此，二直线交点坐标解出联立方程即可求得。反之，如果准确地画出二直线图象，看出它的交点坐标，即可求得联立方程的解。

【想一想】 画出下列二直线的图象，并求出交点坐标。

$x+2y-5=0$ ……………………………①

$2x+y-1=0$ ……………………………②

【略 解】 $(-1, 3)$

方程的历史　（其二）

在第52页里提到的阿梅斯的帕匹鲁斯之外，还有写数学的帕匹鲁斯。在那里记载有能化为二次方程的问题。此外、在巴比仑也研究了二次方程的问题。

春番图（希腊人死于公元330年）虽然知道了二次方程的解法，但是由于不习惯于负数的计算，把二次方程（a，b，c 正数）分成三种情况进行研究。

$$ax^2+bx=c,\qquad bx+c=ax^2$$

$$ax^2+c=bx$$

不仅没考虑到负数解，就是两个解都是正数，也只能解出其中的一个。

纪元五世纪左右在印度，研究定位的表示方法时，使用了叫做零的数，二次方程也不像春番图那样分几种情况，而得到了一般的解法。

此后，在850年左右，阿拉伯人阿尔·夸里兹米写出了包括算术和代数内容的数学书。在这本书里，已经研究了二次方程的无理数解。

第四章　二次方程

§1. 二次方程

（1） 二次方程

进君的小字典，长的长度比宽的长度多 4 *cm*，面积是96 cm^2。

设这个字典两边的长度为 x *cm*，y *cm*，就可以列出 x，y 的联立方程，设宽的长度为 x *cm*时，长的长度为($x+4$) *cm*，可作出只含 x 的方程

$$x(x+4)=96$$

把左边按分配律展开后，并把右边的96移项，得形如

$$x^2+4x-96=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

的方程。

像这个方程这样，右边化为 0，整理左边后，得到的含有变数的二次项(x^2项) 的方程

$$\square x^2+\bigcirc x+\triangle=0$$

叫做二次方程。

把方程 $4(x^2+3)=4x(x-2)+1$ 的两边的括号打开后，$4x^2+12=4x^2-8x+1$ 的两边都有 $4x^2$ 这样的项，移项后使右边为零，则得

$$8x+11=0$$

这是一次方程。

方程　$x^2+4x-96=0$ 的解，是代入

$$\square\times\square+4\square-96=0$$

中的$\square$时，使等式成立的数。

往$\square$中代入几个数看看，

$$\boxed{1}\times\boxed{1}+4\boxed{1}-96\neq 0$$

$$\boxed{2}\times\boxed{2}+4\boxed{2}-96\neq 0$$

$$\boxed{3}\times\boxed{3}+4\boxed{3}-96\neq 0$$

很不容易成为等式，但是把 8 和 -12 代入时，

$$\boxed{8}\times\boxed{8}+4\boxed{8}-96=0$$

$$\boxed{-12}\times\boxed{-12}+4\boxed{-12}-96=0$$

成为等式

实际上，二次方程

$$x^2+4x-96=0$$

的解为 8 和 -12，只有此时等式才成立。

由于 x 是进君字典的长度，所以把变域看成正的实数时，只有 8 是解。

那么，就谈谈二次方程的解法吧。

解一次方程时，应用了方程的同解变形。同样，在解二次方程时，也要依次地作出同解方程。但是在二次方程的情况下，仅用第59页总结出的同解变形是不能求得解的。

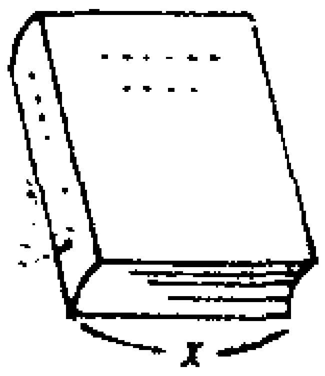
方程的解和字典的长度

○ $x^2+4x-96=0$ 的解是

$\boxed{8}\times\boxed{8}+4\times\boxed{8}-96=0$

$\boxed{-12}\times\boxed{-12}+4\times\boxed{-12}-96=0$

所以 8，−12



字典的长为 8cm

图 1

正像大家都清楚地知道那样，对于二数 a，b，在

$$a\times b=0 \cdots\cdots ②$$

时，可以说

$$a=0 \quad 或者\ b=0 \cdots\cdots ③$$

在二次方程中使用的同解变形

○ $A=B$

$\Longleftrightarrow A\pm C=B\pm C$

$\Longleftrightarrow AC=BC$　　$(C\neq 0)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$

○ $A\times B=0$

$\Longleftrightarrow A=0$ または $B=0$

○ $A^2=B^2$

$\Longleftrightarrow A=B$ または $A=-B$

图 2

反之，稍加考虑，就可知道如果③成立，则②也成立。

另外，当二数 a，b 之间有

$$a^2=b^2 \cdots\cdots ④$$

的关系时，把 b^2 移项后得 $a^2-b^2=0$，再进一步可将此式左边化成 $(a+b)(a-b)=0$。于是应用前页中的②和

③的关系，如果④成立，则必 $a-b=0$ 或 $a+b=0$ 成立，因此

$$a=b \quad 或 \quad a=-b \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

也成立。而且这个情况中也知道，如果⑤成立④也成立。

在前页的②和③的关系以及上面的④和⑤的关系，在适用于方程的情况下，可以得下面的结论

◦当方程为"A ×B =O"的形式时，它和"A =O或B =O"是同解的。

◦当方程为"$A^2=B^2$"的形式时，它与"A =B或A =-B"是同解的。

解二次方程时，除第59页的变形之外，还使用这两个之一的同解变形。

那么，在实际解题时，二次方程

$$x^2+4x-5=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

是怎样求解的吗？

这个方程的左边

$$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$$

能表成一次式乘积的形式。

因此，为了解方程⑥，只要解方程

$$(x+5)(x-1)=0$$

就可以了。

如同前页中说过的那样，因为这个方程和

$$x+5=0 \quad 或者 \quad x-1=0$$

是同解的，把它变形后，得

$$x = -5 \quad 或 \quad x = 1$$

所以，方程⑥的解是－5和 1。

实际上，方程⑥是由于左边

$x^2 + 4x - 5 = 0$ 能表成两个一次式的乘积形式（能因式分解），而解出的。

关于任意方程的解法，将在下面§2中去研究。

二次方程的解集合

$\{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\}$

$= \{x \mid (x+5)(x-1) = 0\}$

$= \{x \mid x + 5 = 0$

　または $x - 1 = 0\}$

$= \{x \mid x + 5 = 0\}$

　$\cup \{x \mid x - 1 = 0\}$

$= \{-5\} \cup \{1\}$

$= \{-5, 1\}$

解是 －5，1

图 3

（2）　平方根

2和－2平方(二乘方)后，两者都是 4。换句话说，平方后得 4的数是 2和－2。因此，设平方后得 4的数为 x，可得方程

$$x^2 = 4$$

这个方程的解是 2和－2。

一般地，对于 $a \geqslant 0$ 的数 a，使 $x^2 = a$的数，也就是平方后成为 a 的数，把它叫做 a 的**平方根**。

例如，4的平方根是 2，－2

　　1.69的平方根是1.3，－1.3。

把 2和－2 放在一起，也可写成±2 。

正数 a 的平方根有两个，这两个只是正负符号不同的数。因此在 a 的平方根中，正的写成$\sqrt{a}$，负的写成$-\sqrt{a}$，把它们放在一起，a 的平方根可写成$\pm\sqrt{a}$。并且把$\sqrt{a}$读成「平方根 a」。

作为上面的例子

$$\sqrt{4}=2 \qquad -\sqrt{4}=-2$$

$$\sqrt{1.69}=1.3 \qquad -\sqrt{1.69}=-1.3$$

用日本话读的时候，说 a 的平方根和平方根 a，要注意这两种说法的区别。

按照在第二章§1（参看第34页）中，已经讨论过的正方形面积是 2的一边的长度，是用1.41……这样的无限小数来表示的数，这个长度是 $x^2=2$ 的数，所以

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$$

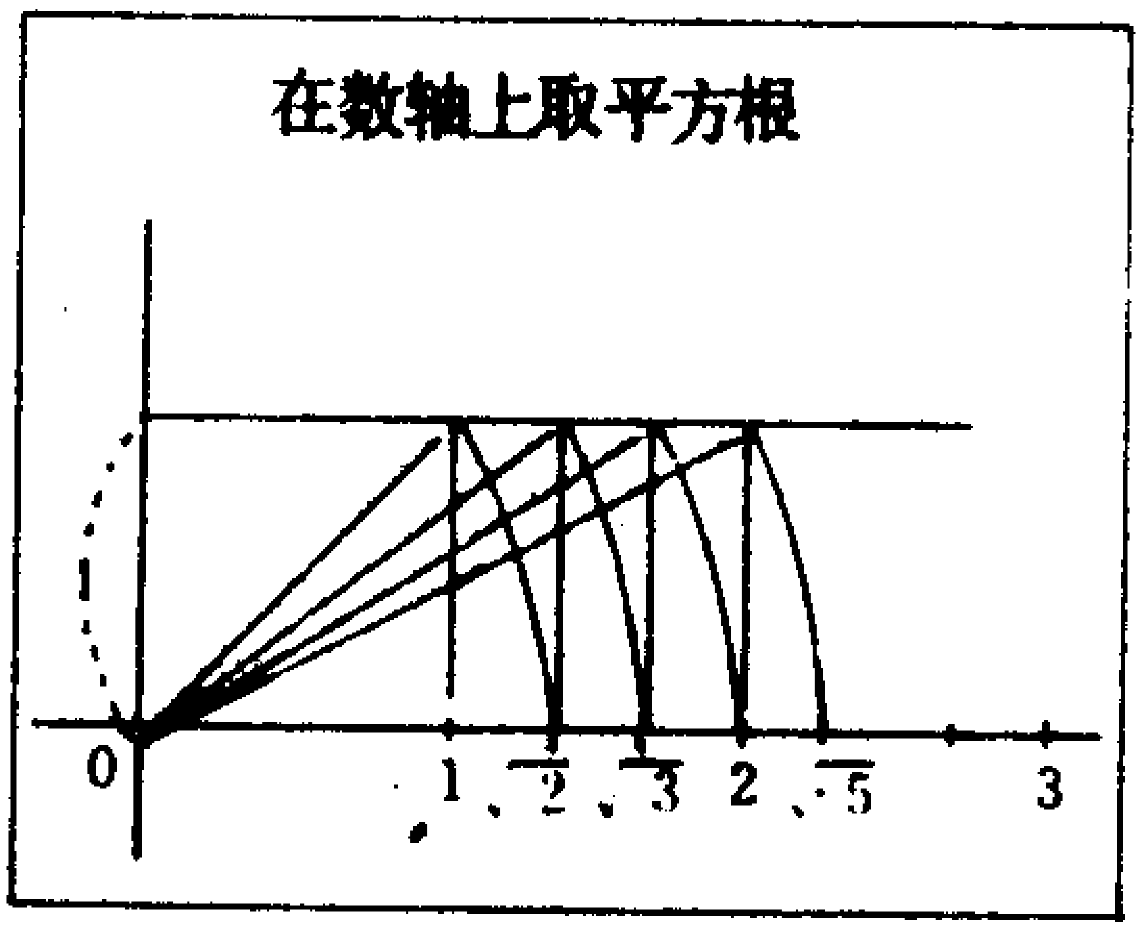


图 4

平方根，如$\sqrt{0}=0$，

$\sqrt{1}=1$，

$\sqrt{4}=2$，　$\sqrt{9}=3$，

这样的在特殊情况下是有理数，但是大部分是无理数，是由小数表出的无限小数。

例如

$$\sqrt{3}=1.73205\cdots\cdots \qquad \sqrt{3.7}=1.9235\cdots\cdots$$

$\sqrt{5}=2.23606\cdots\cdots$　　　　$\sqrt{6}=2.44949\cdots\cdots$

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ 等数，使用直尺和圆规，按图 4的方法，在数轴上都能找到表示它的点。

如果用小数表示无理数去进行平方根的计算，不仅计算量大，而且无论取到小数点后多少位，也不能得到正确的结果。然而，原形不动用$\sqrt{a}$ 来表示，既简单又能得到准确的计算。

例如，$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$　　　　$\sqrt{3}=1.73205\cdots\cdots$

$\sqrt{6}=2.44949\cdots\cdots$，把$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$的值取到小数点后 3位把1.414 ×1.732 的值取到小数点后3 位，得2.448 ，这和$\sqrt{6}$的值大体上相等。因此可以推知$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$。

实际上，平方根的计算有下面法则成立，事情是明显的。

a，b 为非负数时，

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{但是 } b>0)$$

$$\sqrt{a^2}=a \qquad (\sqrt{a})^2=a$$

因此，例如

$$\sqrt{72}=\sqrt{2^3\times 3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}$$
$$=\sqrt{2}\times 2\times 3=6\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{12}+3\sqrt{75}=2\sqrt{2^2\times 3}+3\sqrt{5^2\times 3}$$
$$=4\sqrt{3}+15\sqrt{3}=19\sqrt{3}$$

可以这样计算。

【想一想】 化简下列各式

(1) $\sqrt{1+\frac{24}{25}}$ (2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ (3) $\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{16}-\sqrt{18}$

【略 解】 (1) $\frac{7}{5}$ (2) $5+2\sqrt{6}$ (3) $2+\sqrt{2}$

§2. 二次方程解的公式

(1) 二次方程的解法

"有一块正方形的土地。将这个正方形的一边延长6 m，另一边缩短 4 m，作出矩形，此矩形面积为144 m^2。问原来正方形的边长是多少 m？"

为了研究这个问题，设正方形的一边的长度为 x m。可以列出方程（图5）

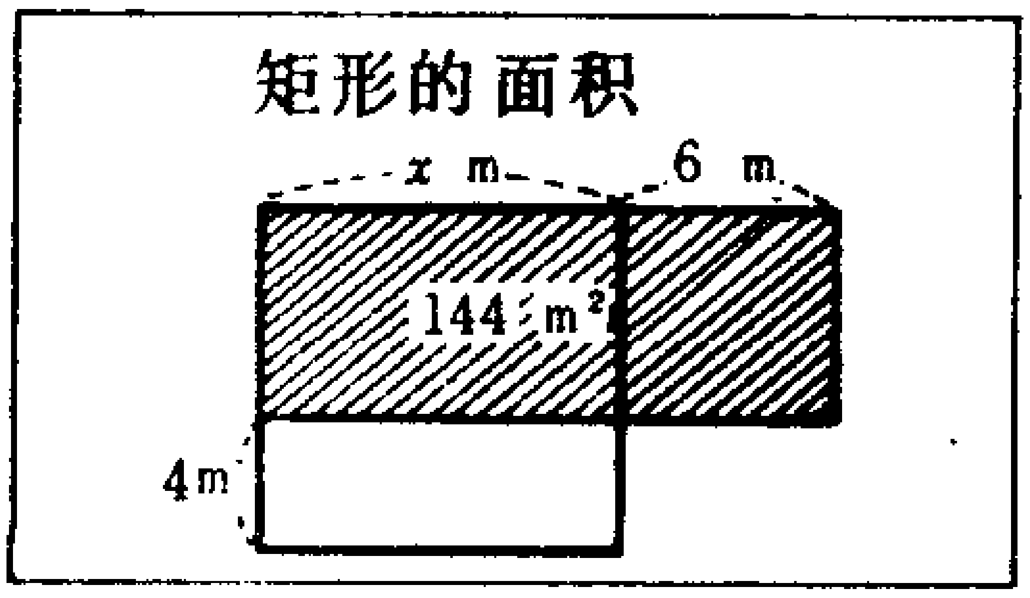


图 5

$$(x+6)(x-4)=144 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

把这个式子的括号打开，进行整理，因为得到

$$x^2+2x-168=0$$

这样的形式，是二次方程。

因为要考虑怎样作才能解这个方程，所以我们来研究二次方程的解法。

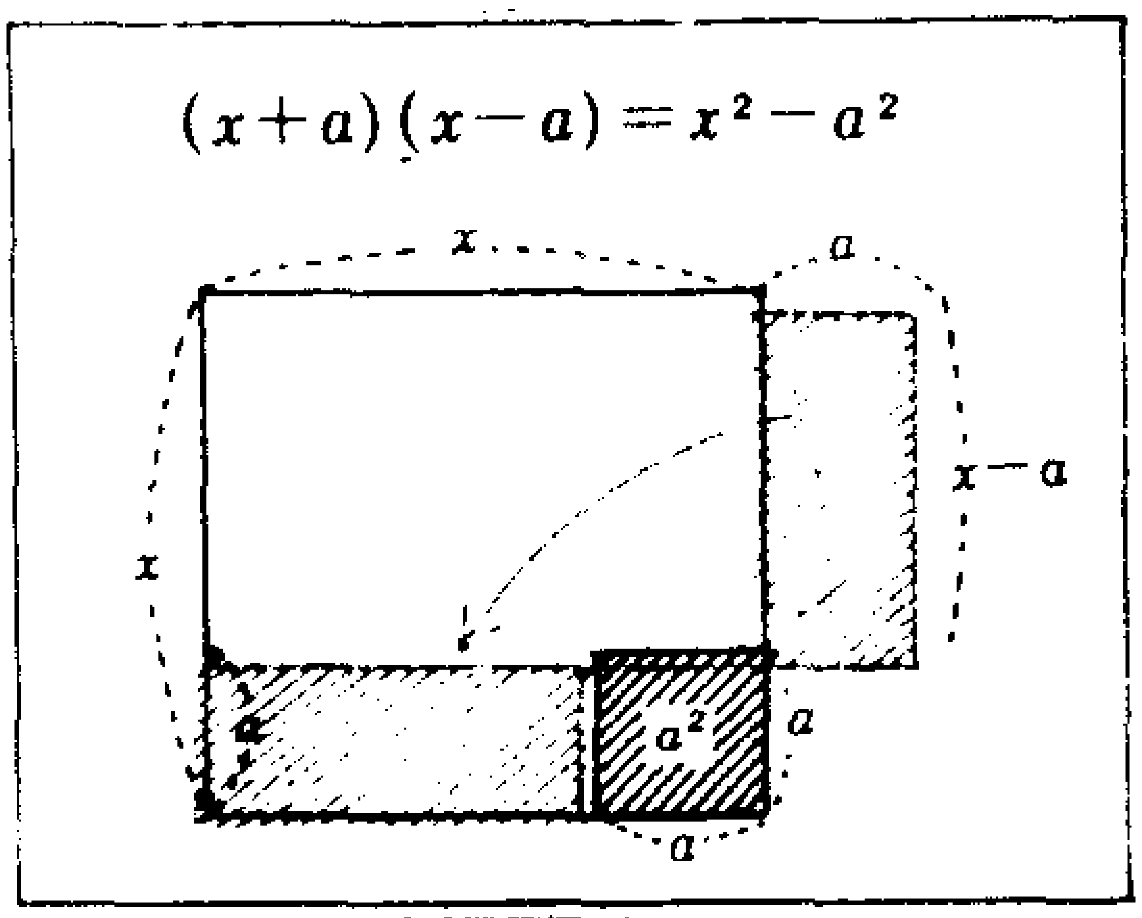
一边长为 x m 的正方形面积当然是 x^2 m^2。现在，如果这个正方形的一边伸长 4 m，另一边缩短 4 m 作一个矩形时，它的面积是

$$(x+4)(x-4)=x^2-16$$

伸长 6 m，缩短 6 m 的矩形面积为

$$(x+6)(x-6)=x^2-36$$

图6



一般来说，把一边伸长 a m，另一边缩短 a m 所得矩形面积为

$$x^2-a^2$$

如图6，与正方形面积相比，只小 a^2 m^2。

那么，[redacted]果最初的问题为一边伸长 6 m，另一边缩短 4 m 时，将是怎样的呢？

如图7，把最初的正方形的长和宽的长度增加1 m，来考虑每边长为 $(x+1)$ m 的正方形。

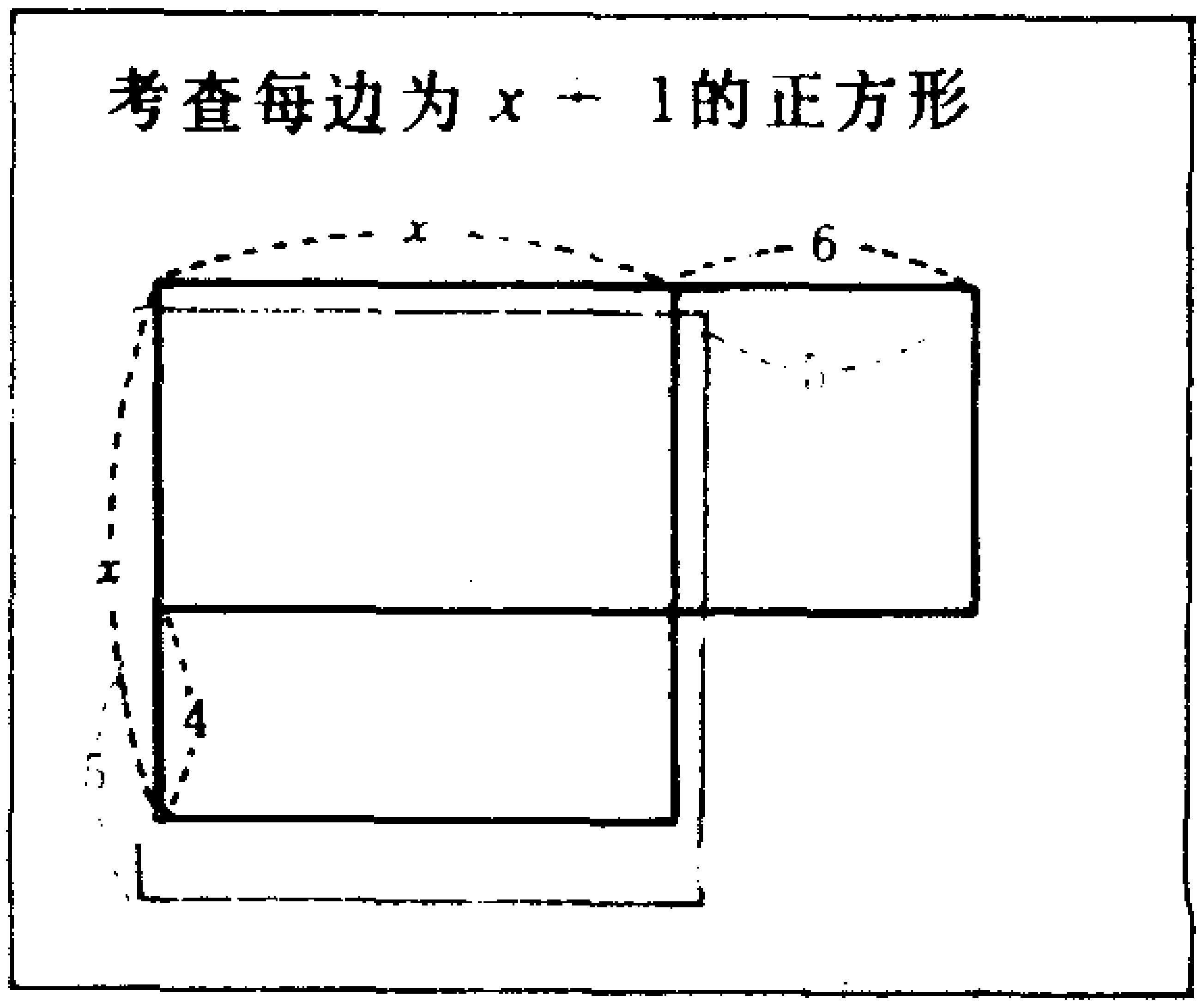


图7

为什么这么说把一边伸长 6 m ，实际上是把边长为 $(x+1)$ m 正方形的一边伸长 5 m ，另外，把一边缩短 4 m ，实际上是把 $(x+1)$ m 正方形的一边缩短 5 m 。

实际上，因为 $(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(x+6)(x-4)=x^2+2x-24$

由上面二式得关系式

$$(x+6)(x-4)=(x+1)^2-25 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

实际上，通过这种关系，第 105 页的方程①就可以解出。

用②式改写方程①，得

$$(x+1)^2-25=144$$

把左边的 -25 移项后加在右边，得

$$(x+1)^2=169 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

在方程③中，把 $x+1$ 用 y 代换，得

$$y^2=169$$

由此，得

$$y=13 \quad 或 \quad y=-13$$

$(x+1)^2=169$ 的解

$\{x \mid (x+1)^2=169\}$

$=\{y \mid y^2=169, y=x+1\}$

$=\{y \mid y=13$ 或 $=-13$, 与 $y=x+1\}$

$=\{x \mid x=12$ 或 $=-14\}$

$=\{12, -14\}$

图8

而又从 $y=x+1$ 的关系中，得

$$x=12 \quad 或 \quad x=-14$$

因为把12和-14代入方程①成为等式，二者都应是①的解，但是作为正方形的边长，

$12m$ 是答案。

现在根据讨论过的，二次方程如果变形成为

$$(x+1)^2=169 \quad 即 \quad (x+1)^2-169=0$$

的形式好象就能得解。

那么，方程为

$$x^2+6x+2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

的形式时，怎样作才能变形呢？

在这里，首先变成

$$x^2+6x=x(x+6)$$

把这个和

$$(x+3)^2=x^2+6x+9$$

比较，得

$$x^2+6x=(x+3)^2-9$$

于是可用它使方程④化为

$$(x+3)^2-7=0$$

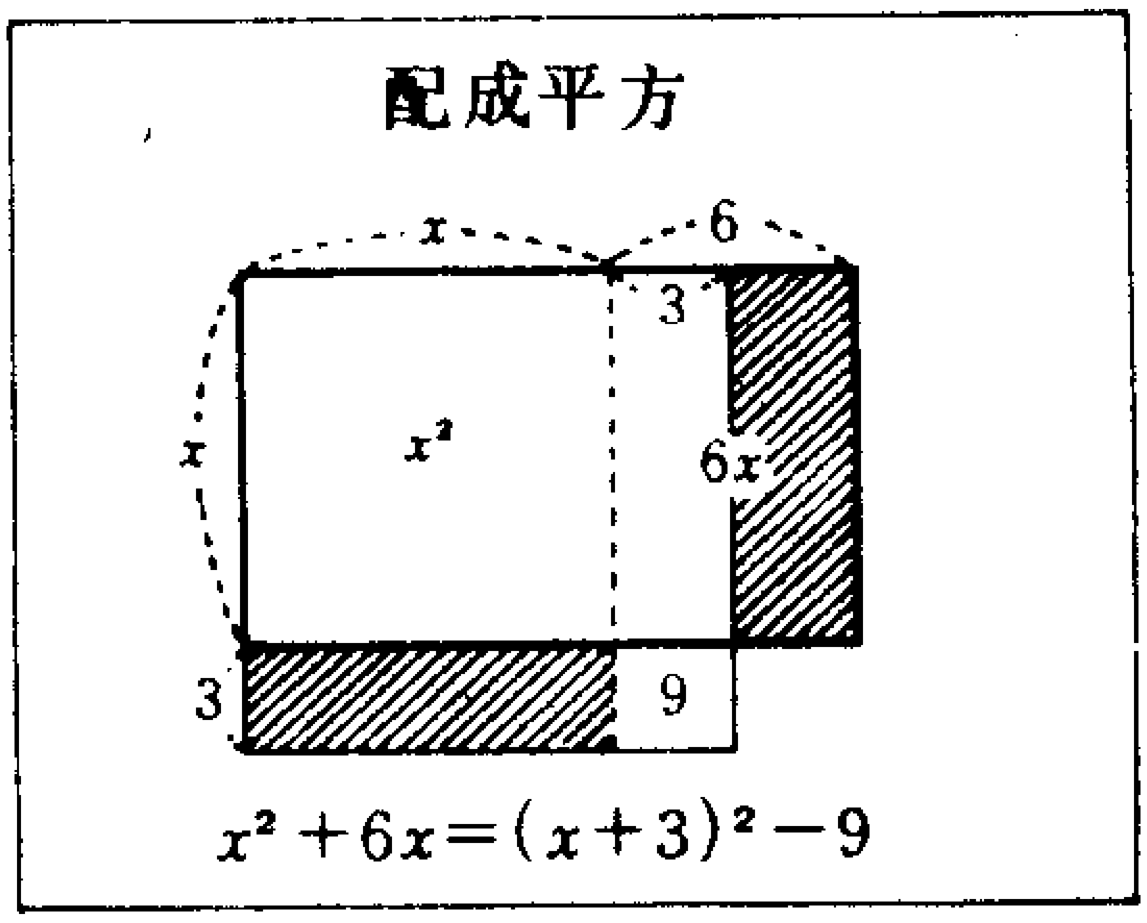


图9

如此，将 x 的二次式变形为 $(x+\square)^2-\bigcirc$ 的形式，把它叫做**配成平方**。

所以二次方程通过配平方可以解出。配平方是使用

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \quad 亦即$$

$$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$$

这种关系，得到

$$x^2+2ax+b=(x+a)^2+b-a^2$$

就可以了。

【例题 1】 解二次方程　$x^2-4x+1=0$

（解）把左边配平方，得

$$x^2-4x+1=x^2-2.2x+2^2+1-2^2$$
$$=(x-2)^2-3$$

因此方程成为

$(x-2)^2-3=0$　即　$(x-2)^2=3$

因为它和

$x-2=\sqrt{3}$　或　$x-2=-\sqrt{3}$

是同解的，所以　$x=2+\sqrt{3}$　或　$x=2-\sqrt{3}$

【想一想】　试解下列二次方程　（答）$2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$

（1）　$x^2-7x+6=0$　　（2）　$x^2+6x-1=0$

【略　解】（1）　1，　6　（2）　$-3+\sqrt{10}$，$-3-\sqrt{10}$

（2）　二次方程解的公式

二次方程，像前页的【例题1】那样，如果能配平方就能解出。但是，每解一个题都配一次平方，运算所需的时间就不得了。

因此，要考虑由字母表示的

$$ax^2+bx+c=0$$

这样的一般方程，推出求解公式。

首先，因为这个方程是二次方程，

$a \neq 0$。所以两边除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

因为是用字母表示的式子,稍有些困难，可以边看图10，把左边配成平方时，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$$=x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x$$

$$+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

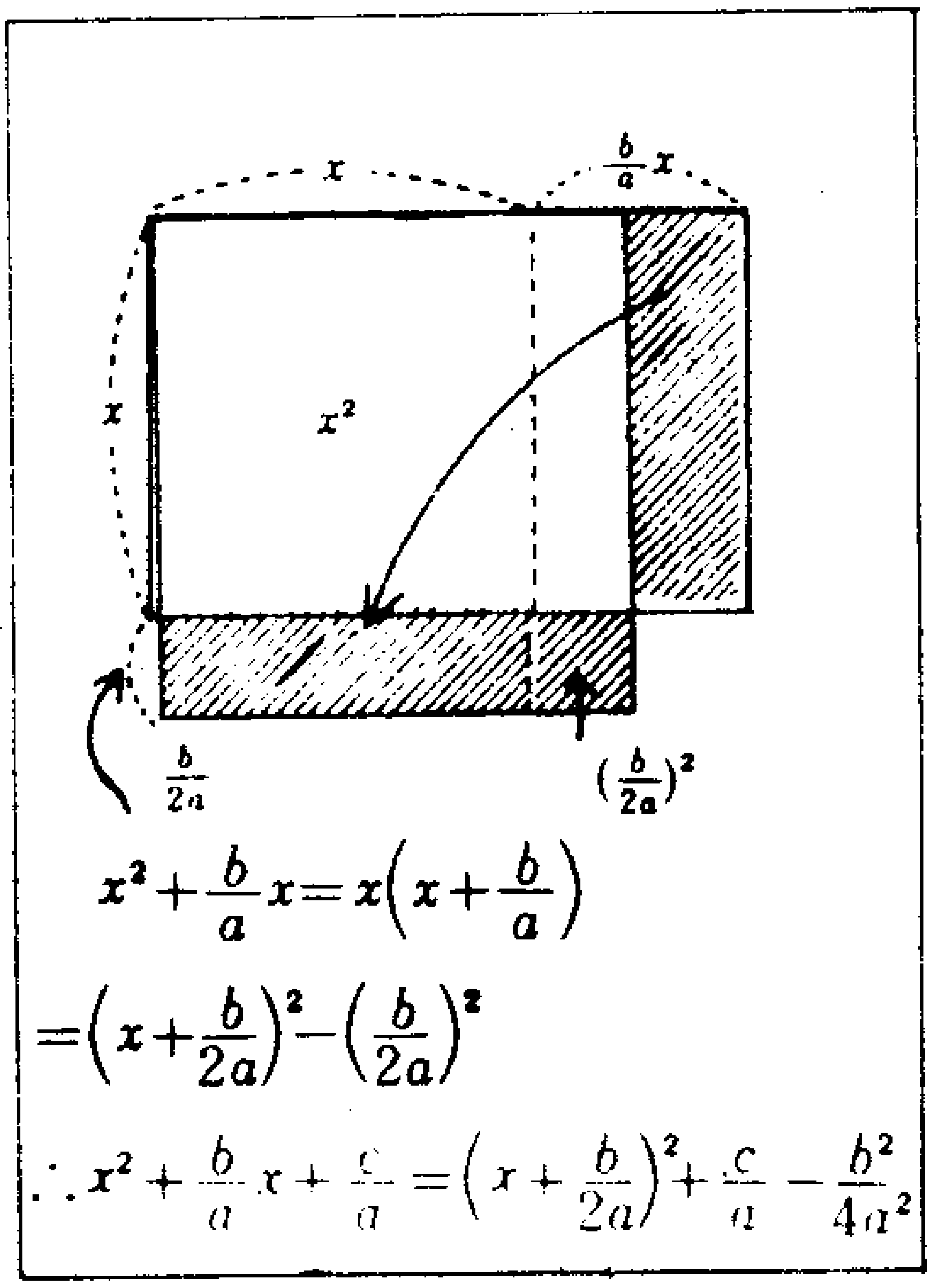


图10

方程化成

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

把 $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 移项到右边，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

又由于 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$

这个方程，和

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 或者 \quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

是同解的。因此，再把$\dfrac{b}{2a}$移项后，得

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 或者 \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

所以，解是

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

把这两式归拢到一起，可写作

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots⑥$$

> 二次方程解的公式
>
> 二次方程
>
> $ax^2+bx+c=0$
>
> （当 $a\neq0$）
>
> 的解是
>
> $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

把⑥叫做二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解（根）的公式。

【例题 2】 解二次方程

$$x^2+2x-6=0$$

（解）代入公式，因为 $a=1$，$b=2$，$c=-1$，所以

$$\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{2}$$

$= 1 \pm 7$　　　（答）　-1 ± 7

这个解也可以分开写成 $-1+\sqrt{7}$，　$-1-\sqrt{7}$，但是写成“$-1+\sqrt{7}$ 或者 $-1-\sqrt{7}$”是错误的。

【想一想】　使用解的公式，解下列二次方程。

（1）　$2x^2+x-1=0$　　　（2）　$x^2+5x-3=0$

（3）　$9x^2-12x+4=0$　　　（4）　$3x^2+2x-4=0$

【略　解】（1）$\frac{1}{2}$，-1　（2）$\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$　（3）$\frac{2}{3}$

（4）$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$

§3. 因式分解与二次方程

应用分配律把两个一次式相乘 $(x+1)(x-3)$ 的式子的括号打开，得

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= (x+1)x-(x+1)3\\ &= x^2+x-3x-3\\ &= x^2-2x-3\end{aligned}$$

这样的二次式。

因此，把这个计算的开始和结果交换，并且用等号联结起来，得

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

就能看出这是把二次式化成两个一次式乘积的形式的运算。

其它如， $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

$$x^2-5x=x(x-5)$$

$$x^2-9=(x+3)(x-3)$$

都是二次式化成两个一次式乘积的例子，这样的例子能作出很多，但并不是说任何二次式都能化成一次式乘积的形式。

把二次式化成两个一次式乘积的形式，这种变形叫做二次式的**因式分解**，现在来考虑一下在什么情况下，二次式可以因式分解。

关于二次式的因式分解，有没有什么简单的方法呢？为了找到这种方法，举出前页的例子加以考察

$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$

把左边和右边对比一下看看，因为左边的7是由右边的2与5的和得到的。此外，左边的10是右边的2和5的乘积得到的。可知，能作出

$$\begin{aligned}x^2+7x+10&=x^2+2x+5x+2\cdot5\\&=(x+2)x+(x+2)5\\&=(x+2)(x+5)\end{aligned}$$

这样的因式分解。

一般来说，如图11可得出

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)&=x^2+ax+bx+ab\\&=x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

为了能对形如

$x^2+\square x+\bigcirc$

的二次式进行因式分解，能找出

$a+b=\square$，　$a\cdot b=\bigcirc$

这样的 a，b 就可以了。例如在 $x^2+5x-24$式中，使

$a+b=5$，　$a\cdot b=-24$

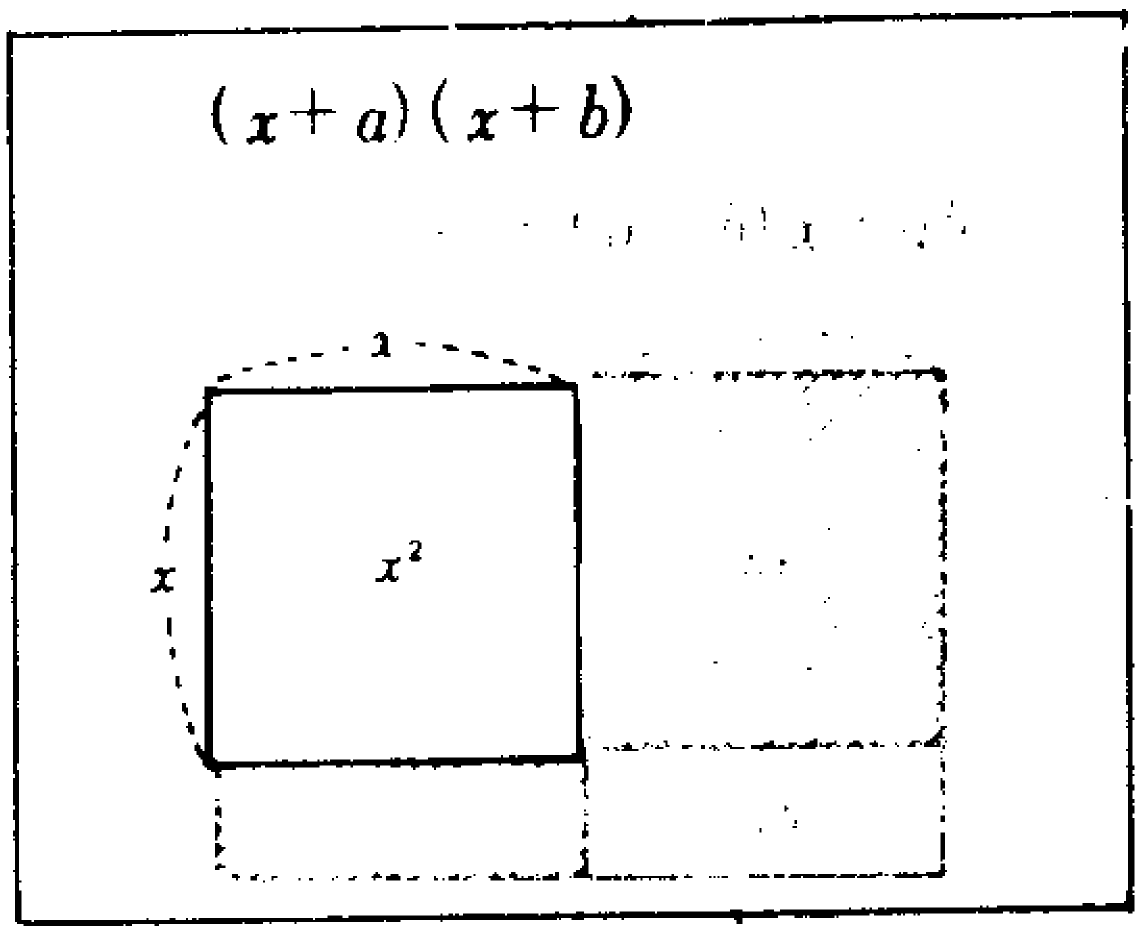


图11

这样的二数，可知它应是 8 和 -3。所以因式分解，得

$$x^2+5x-24=(x+8)(x+(-3))$$
$$=(x+8)(x-3)$$

另外，x^2-3x 这样的式子，与其说根据 $a+b=-3$，$a\cdot b=0$ 求出 a，b 二数，莫如把 x^2和 $-3x$ 用括号括起来，得 $x^2-3x=x(x-3)$，使因式分解更简单地作出来。

同理，x^2-16这样的式子，利用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 可分解为

$$x^2-16=(x-4)(x+4)$$

（图12）

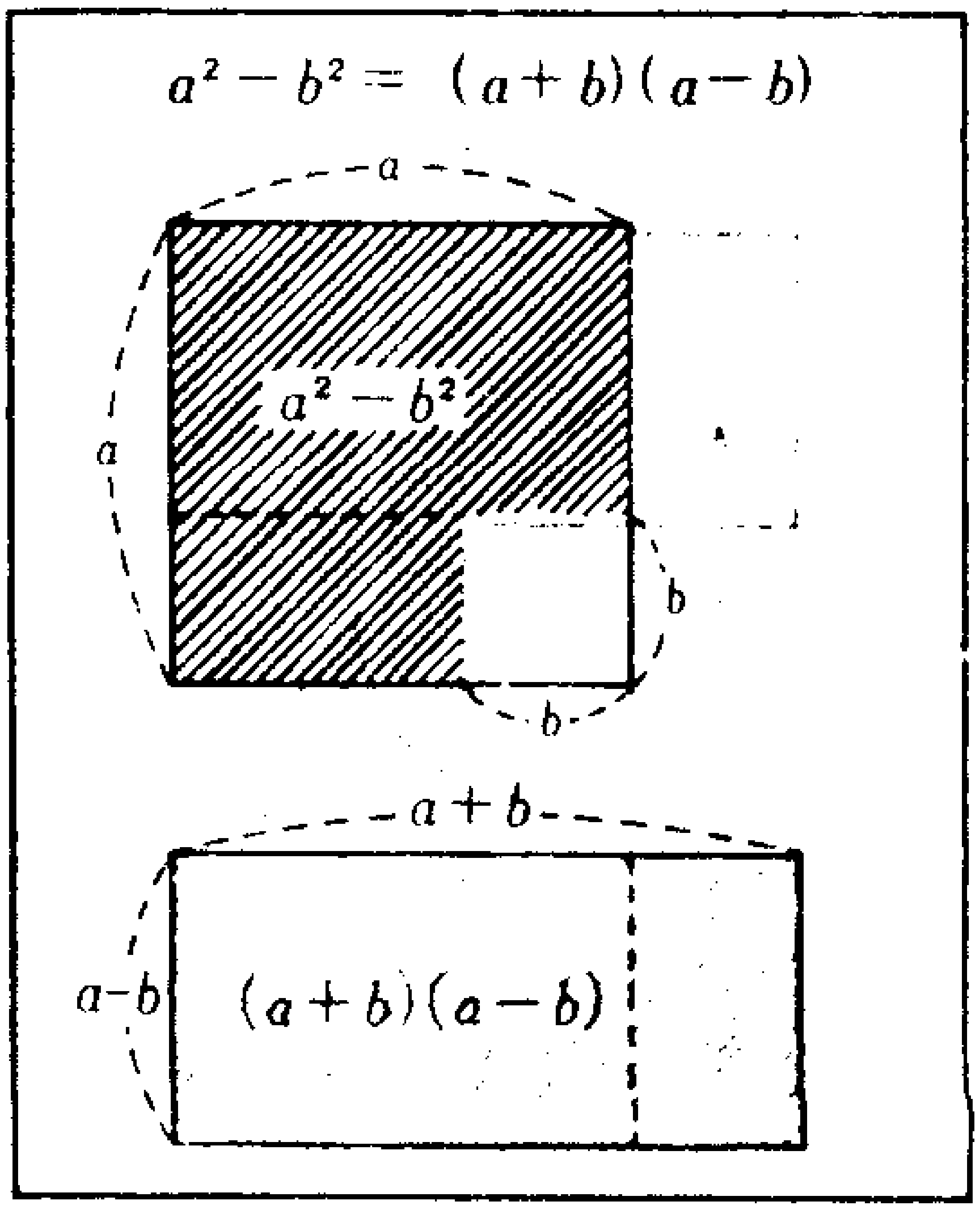


图12

把二次方程写成形如

$$x^2+\square x+\bigcirc=0$$

时，如果左边可以因式分解为

$$(x+a)(x+b)=0$$

时，此方程与

$$x+a=0 \quad \text{或者} \quad x+b=0$$

是同解的，可以简单地得解。

例如

$$x^2+7x+12=0$$

的左边可以因式分解为

$$(x+3)(x+4)=0$$

因此这个方程与

$$x+3=0 \quad \text{或} \quad x+4=0$$

是同解的，如果解出每个一次方程，即可求出解 -3，-4。

【例题】 有直角三角形，夹直角的二边之和为10，面积为12时，求二边的长度。

（解） 设二边的长为 x，$10-x$，可得方程

$$\frac{1}{2}x(10-x)=12 \quad \text{整理后，得}$$

$$x^2-10x+24=0$$

把左边因式分解，得 $(x-4)(x-6)=0$

所以得二边的长为 4 和 6。

【想一想】 1. 将下式因式分解。

（1）$x^2-2x-15$ （2）$x^2+8x+16$ （3）x^2-5x+4

2. 用因式分解法解下列方程

（1） $x^2-6x-16=0$ （2） $2x^2+7x=0$

【略 解】 1. （1） $(x+3)(x-5)$ （2） $(x+4)^2$

（3） $(x-1)(x-4)$ 2.（1）-2, 8 （2）$-\frac{7}{2}$, 0

§4. 二次方程和二次式的图象

（1） 二次式的图象

在第三章§5（参看第85页），关于方程的图象以及图象和方程解的关系，都已作过说明。在这里将研究二次式的图象。

把长为12*cm*的铁丝围成矩形时，把长，宽的长度和面积的关系表示成如下

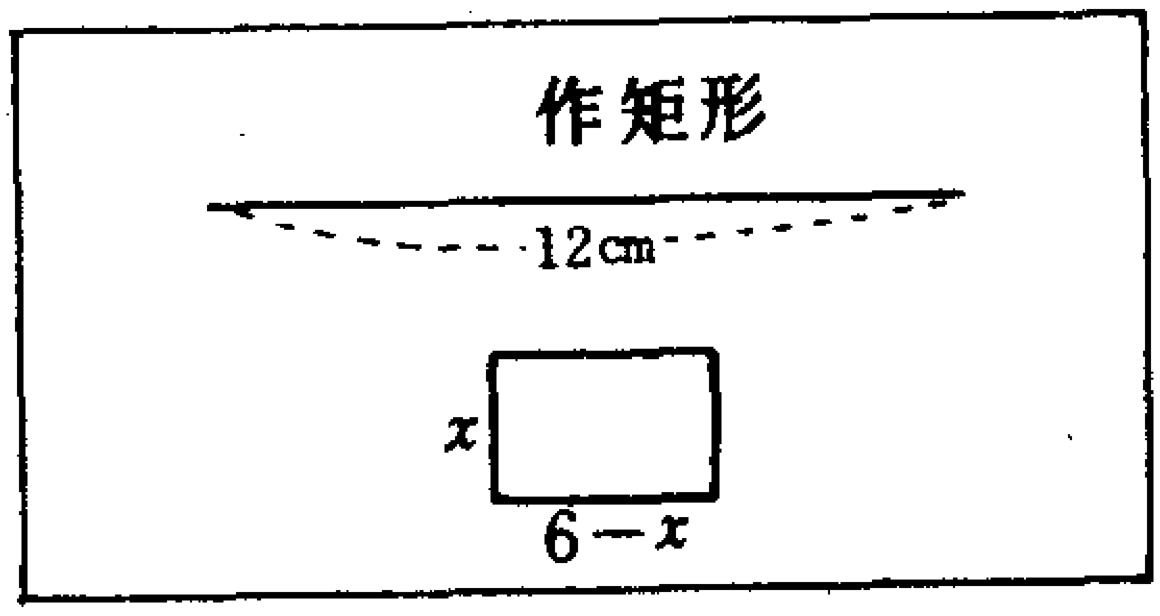


图13

たて(cm)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
よこ(cm)	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
面積(cm^2)	2.75	5	6.75	8	8.75	9	8.75	8	6.75	5	2.75

设矩形长的长度为 x cm，则宽的长度为（$6-x$）cm，把面积用 y cm^2 表示，可得下式

$$y = x(6-x)$$

$$y = -x^2 + 6x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

这个式子是 x，y 的二变数方程，右边是 x 的二次式，因为 x 值确定后 y 值也随之确定，把这个对应规律叫做**二次函数**。

由于所取的 x 值，必须大于零小于 6，所以 x 的取值范围是区间（0，6）。

作为①的解的一组点（x，y），由上表可知虽然有

（0.5，2.75），（1,5），（1.5,6.75），（2，8），……

但此外还可以取任意多。

因此，在平面取出大量的使 $y = -x^2 + 6x$ 成立的点（x，y），画出图象后，如图14的 a。图象两端画圆圈的点，（0，0）及（0，6）是表示不包含在图象之内的点。

假如，x 也可以取所有实数值时，则 $y = -x^2 + 6x$ 的图象，将像图14 b 那样，是向 x 轴下方也无限延长的曲线。

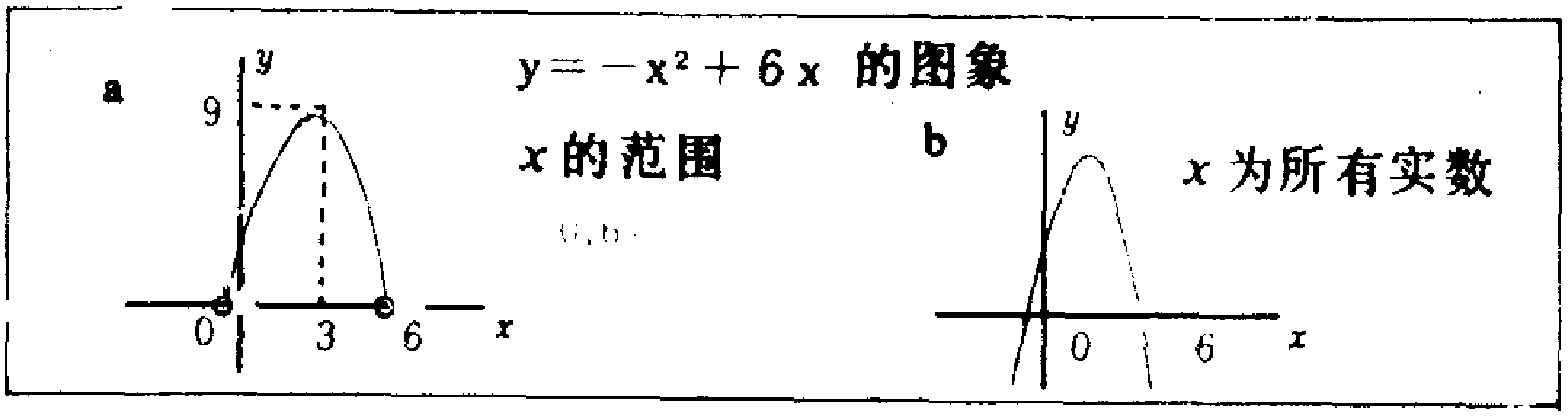


图14

如同一次式的图象是直线，形如

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

的二次式的图象是叫做抛物线的曲线。

画二次式的图象，例如画

$$y = x^2 - 4x - 5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

的图象，可先把各个数代入 x 后，再考察 y 的值，如果把这样的点找出，即可画出图象。

但是，画这个图象时，像解二次方程一样，应用配方去作，将容易了解图象的样子。

把上面②式的右边配平方后，得

$$y = x^2 - 4x - 5 = x^2 - 4x + 4 - 9 = (x-2)^2 - 9 \cdots ③$$

实际上由此可知②的图象，正如图15那样，它通过点（2，-9），并且在这点下面没有图象。

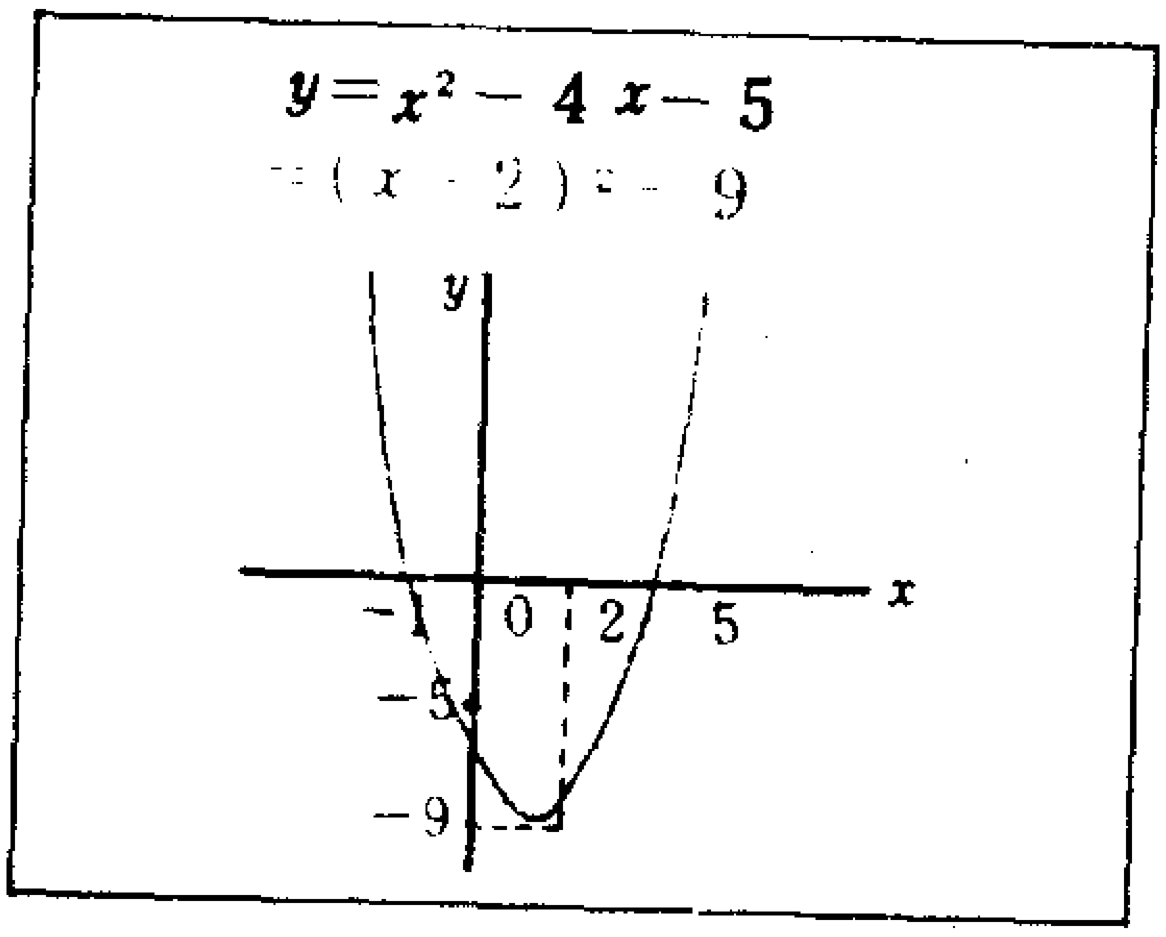


图15

为什么这样说？因为把任何数代入 x，③式中的 $(x-2)^2$ 也不能小于 0。

因此

$$(x-2)^2 - 9$$

是不能小于 -9 。

所以，从 $y = (x-2)^2 - 9$ 这个式子可以看出，y 的值不能小于 -9 ，并且当 x 为 2 时 y 为 -9 。

往　$y=(x-2)^2-9$中的x代入各种数以后，表示x，y的关系为

x	−2	−1	0	1	1.5	2	2.5	8	4	5	6……
y	7	0	−5	−8	−8.75	−9	−8.75	−8	−5	0	7……

当x为 2时，y为−9，除此以外都大于−9。于是，由于当x为−1 和 5的时候y为0，所以图象和x轴的交点为(−1,0)，(5，0)。并且由于x为0 时，y为−5，图象和y轴的交点为(0，−5)（图15）。

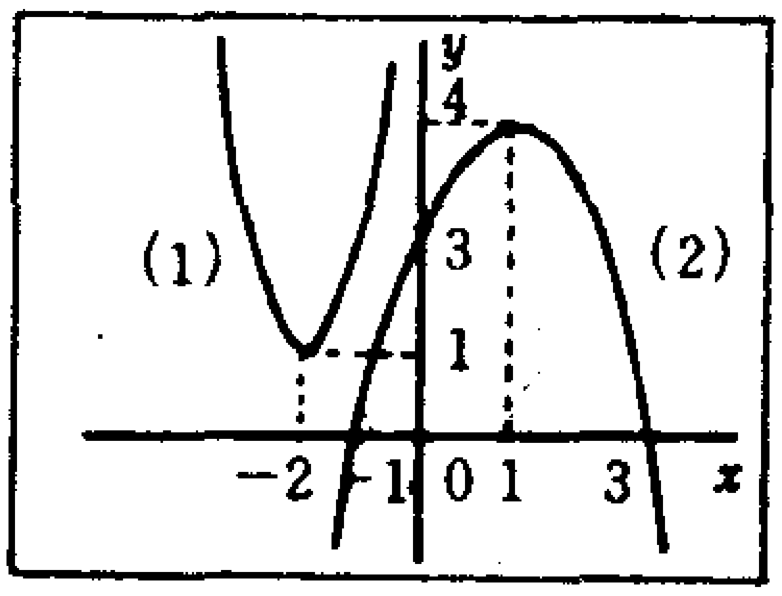
在画二次式的图象时，配方后了解到，像图15的（2，−9）和图14的（3，9）这样的点，是很方便的。把这个点叫做抛物线的顶点。此外，把几个数代入x后，考察y值同时，如果也了解到与x轴以及y轴交点的坐标，就能画出图象了。

【想一想】　画出下列二次式的图象

（1）　$y=2(x+2)^2+1$

（2）　$y=-x^2+2x+3$

【略　解】



（2）　二次方程的解和二次式的图象

二次式

$$y=x^2+2x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

的图象，由于把右边配平方后得 $(x+1)^2-4$，知顶点是 $(-1, -4)$。另外，由于知道 x 为0 时，y 为 -3，所以和 y 轴交于 $(0, -3)$。

可是和 x 轴的交点在哪里呢？

实际上，和 x 轴的交点坐标是在④式中写 y 为0 时的 x 值，所以是二次方程

$$x^2+2x-3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

的解。

因为这个方程的解是 -3，1，所以④的图象和 x 轴的交点是 $(-3, 0)$，$(1, 0)$。

那么，把包括最初的④在内的三个图象绘出，来看一看

$$y=x^2+2x-3 \qquad (a)$$

$$y=x^2+2x+1 \qquad (b)$$

$$y=x^2+2x+2 \qquad (c)$$

(a)式，如开始时已经研究过的那样，顶点是 $(-1, -4)$

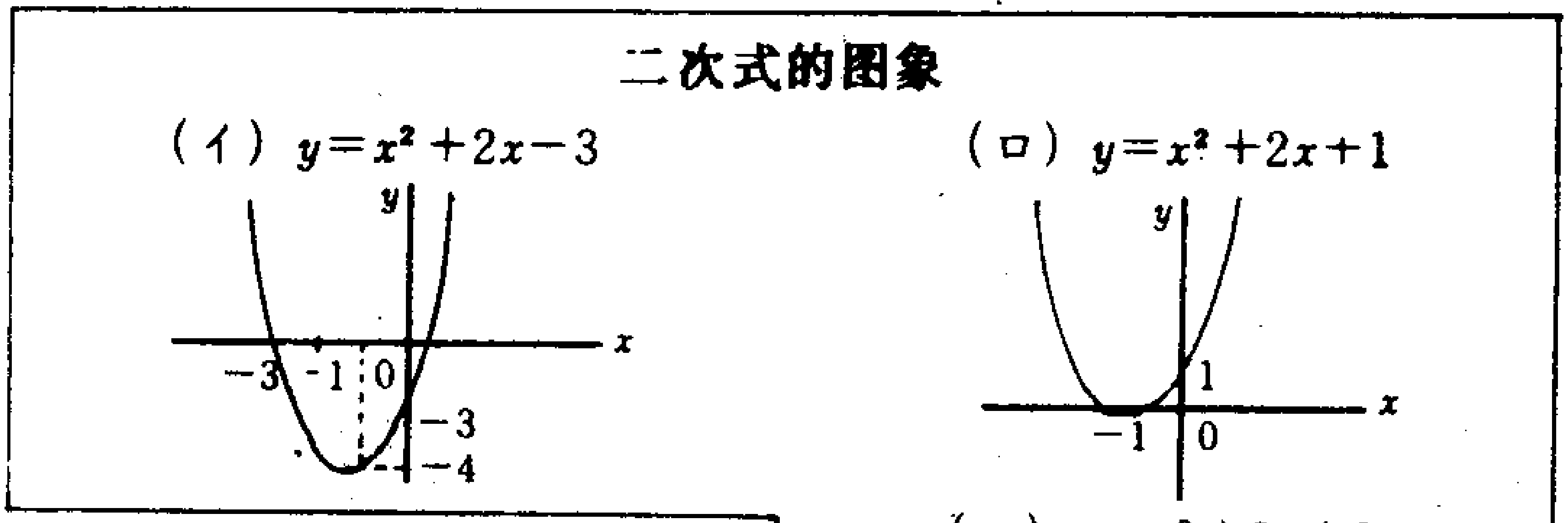
(b)式，右边为 $(x+1)^2$，所以顶点是 $(-1, 0)$

(c)式，右边为 $(x+1)^2+1$，所以顶点是 $(-1, 1)$。

所以 (a)，(b)，(c) 的三个图象，分别为图16的 (a)，(b)，(c)。

在 (a) 中，图象与 x 轴交于两点，(b) 是和 x 轴切于一点，而 (c) 和 x 轴不相遇。

这样，由于二次式的图象是抛物线，不论是什么样的图



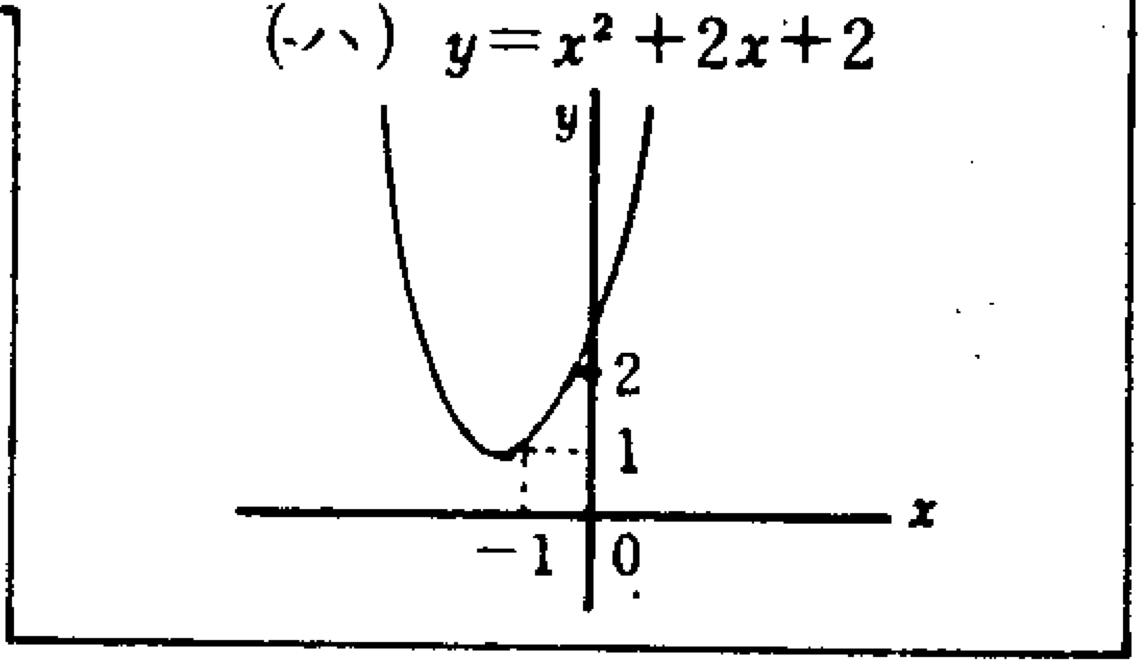


图16

象，一定是和 x 轴或者交于二点，或者切于一点，或者不相遇，三种情况必居其一。

这里，令前页的（a），（b），（c）各式的 y 为零，则得到下面方程

$x^2+2x-3=0$ ………………………… $(a)'$

$x^2+2x+1=0$ ………………………… $(b)'$

$x^2+2x+2=0$ ………………………… $(c)'$

考察一下。

首先，$(a)'$ 方程左边因式分解，得 $(x+3)(x-1)=0$ 所以解是 -3，1。这是在第122页中已解出了的，从图16（a）的图象中也可以看出。

$(b)'$ 的方程，左边也能因式分解，成为 $(x+1)^2=0$，此时解只有 -1。

然而$(c)'$ 的方程，配平方后得

$$(x+1)^2+1=0$$

但是由于左边是$(x+1)^2$的形式，因为$(x+1)^2+1$不能小于 1，所以使这个方程成为等式的实数 x 是不存在的。

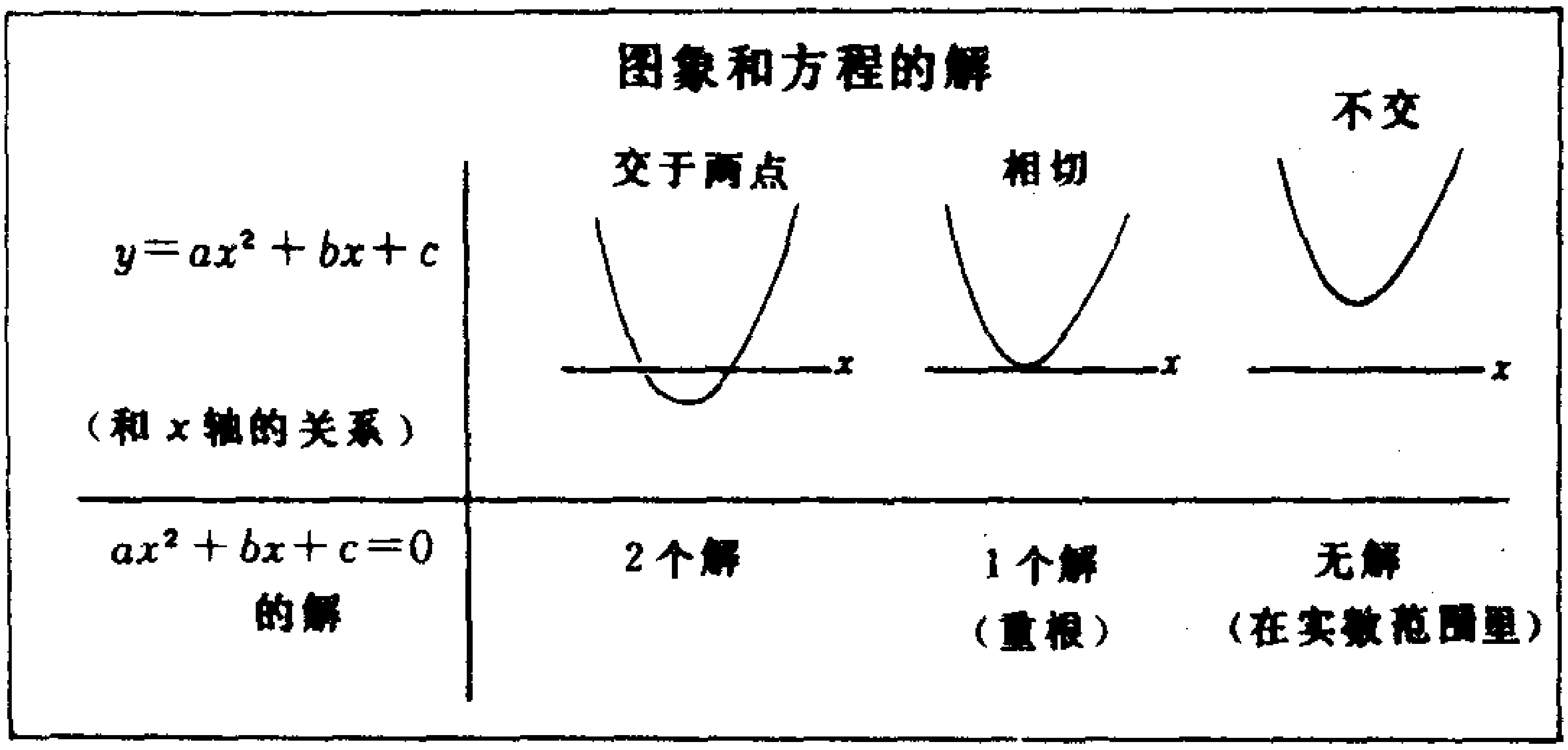


图17

由这些例子可知，任何二次方程将是有两个解，只有一个解，没有解（在实数范围内）三者必居其一。

因为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解时，就是二次式 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和 x 轴相交，这时在图象和方程的解之间存在图17的那种关系。

图象和 x 轴相切于一点，就是方程的解是一个的时候，则说方程有重根。另外图形和 x 轴不相遇时，所说的方程无解，指的是在实数范围内考虑时是没有解的。

从图象和方程的关系可知，抛物线的图象和 x 轴的交点坐标，能通过解二次方程求得。反之，正确地画出图象时，

能从图象上得出二次方程的解。

例如 $y = 2x^2 - 3x - 4$

的图象和 x 轴的交点坐标，能从解方程 $2x^2 - 3x - 4 = 0$

中得出 $\dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

所以它是 $\left(\dfrac{3 - \sqrt{41}}{4},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{3 + \sqrt{41}}{4},\ 0\right)$。

【想一想】 求出下列图象和 x 轴交点的坐标。

（1） $y = x^2 - 3x + 1$ （2） $y = x^2 + 4x + 4$

【略 解】（1）$\left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

（2） $(-2,\ 0)$

第五章　复　数

§1.　虚　数

（1）　负数的平方根

进君自己列出一些二次方程，用求解的公式解后一看，发现了很多奇怪的情况。

例如，方程

$$x^2+3x+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

用解的公式求解，得到$\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$。但是因为这个$\sqrt{-7}$是平方后得 -7的数，这种数在实数中是没有的。

为什么呢？因为实数中即使是负数，平方之后也是正数。

因为①式左边为$(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$，所以这个方程(在实数范围内）无解。

这样，用解的公式求解时，如果根号内是负数，在实数范围内不能求解，所以在第四章，只讨论了在根号内是正的或为0 的二次方程。

今后，不认为最初提出的 $x^2 + 3x + 4 = 0$ 这样的方程没有解，想使任何这种方程都能解出。于是要去考虑平方后为负数的这种新数（图1 ）。

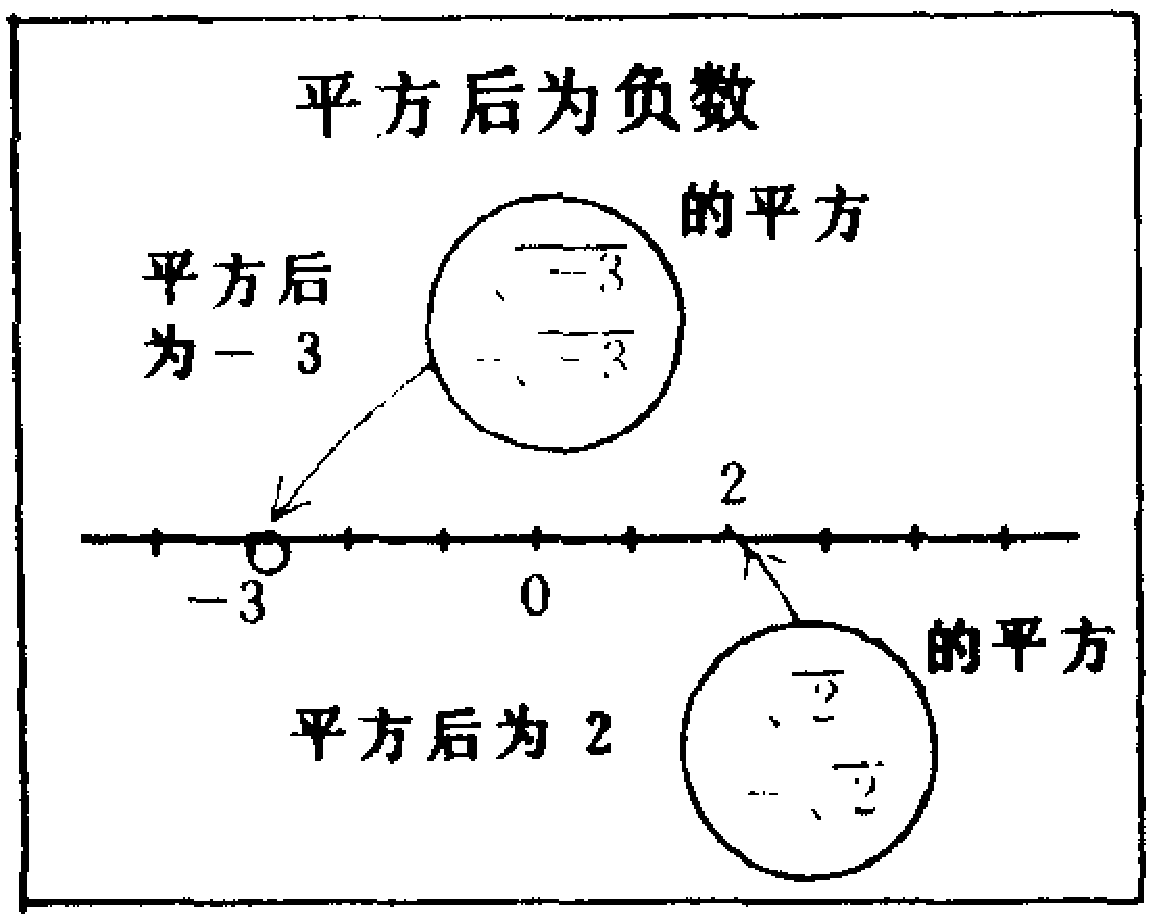


图 1

平方后为 5的数有两个，把它写作 $\pm\sqrt{5}$。同理，我们要考虑平方后为－7 的数，以及平方后为－3 的数，设把它写成 $\pm\sqrt{-7}$，$\pm\sqrt{-3}$。当然 $\sqrt{-7}$ 和 $\sqrt{-3}$ 不是实数。

正数的平方根，可以用104页的那种法则去计算，设根号内为负数时，也能用同样方法计算，

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{3} = \sqrt{-6}$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{2} = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1}$$
$$= 2 \times \sqrt{-1}$$

这时，则有

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7} \times \sqrt{-1}, \qquad -\sqrt{-3} = -\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3 \times \sqrt{-1}$$

由此可知 $\sqrt{-7}$，$\sqrt{-3}$，$\sqrt{-9}$ 这样的数，能用 $\sqrt{7}$，

$\sqrt{3}$，3这样的数和新数$\sqrt{-1}$表示出来。

于是，可以把$\sqrt{-1}$用符号 i 来表示， 那么下列各数可以写成

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i，\quad \sqrt{-17}=\sqrt{17}\,i$$

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\,i=3\,i$$

由于 $i=\sqrt{-1}$，所以 i 是 $i^2=-1$ 的数。

这样，考虑了这个新数之后，使用解的公式时，二次方程 $x^2+3x+4=0$ 的解为

$$\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

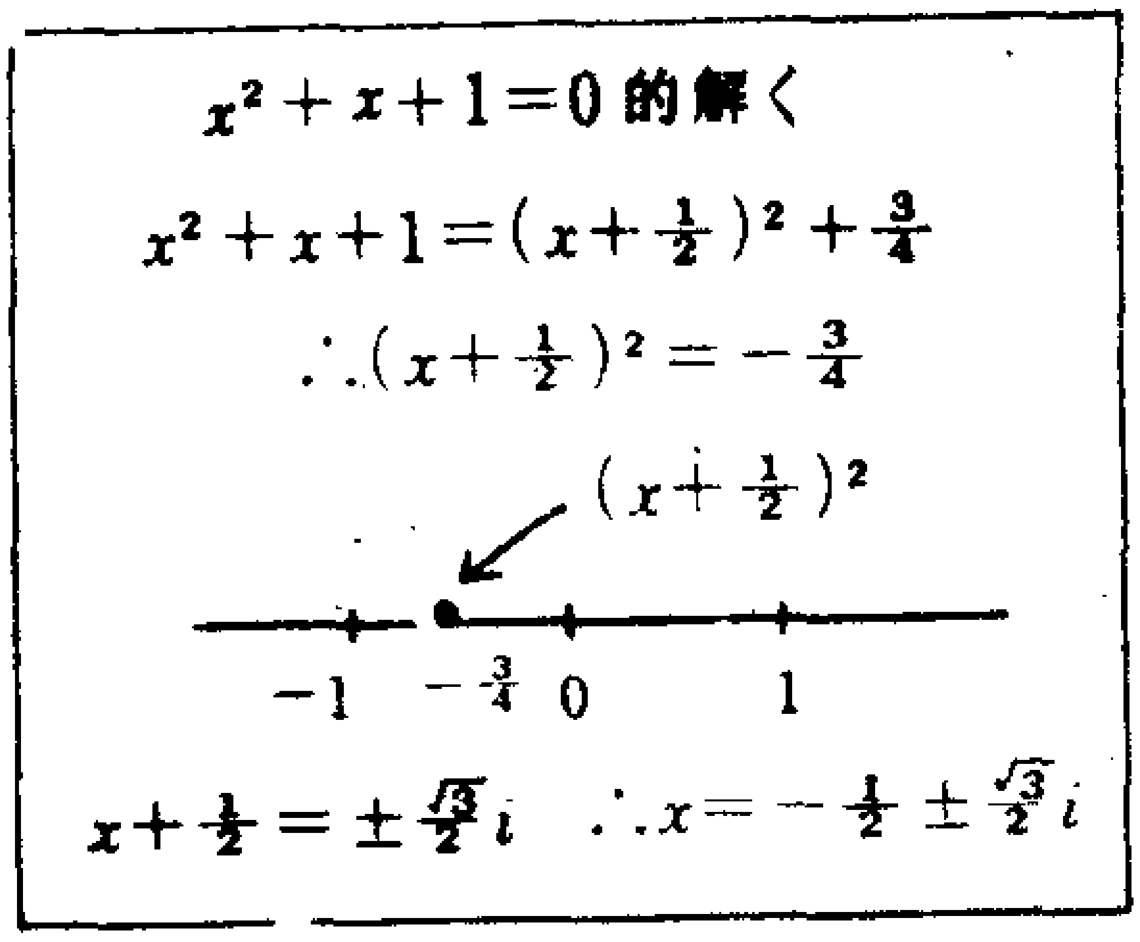


图 2

$x^2+x+1=0$ 的解为

$$\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

什么样的方程都能得解。

那么，这样的数真正是二次方程的解吗？

现在把$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$代入 x^2+x+1的 x 中进行验证。

我们才开始对 i 这个数进行计算，只把它作为一般的字母看

待，只须注意到 $i^2=-1$ 来进行计算就可以了。

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i^2=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$$

可以说 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 确实是方程 $x^2+x+1=0$ 的解。

这样，考虑 i 这个新数之后，任何二次方程都可能求解。

【想一想】 1.把平方后为−12，−16的数，用 i 表示出来。

2. 解下列方程

（1）$x^2-2x+2=0$　（2）$2x^2+4x+3=0$

【略　解】 1. $\pm\sqrt{12}\,i$，　$\pm 4i$

2.（1）$1\pm i$　（2）$-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

（2） 虚 数

像方才研究的这样，考虑到 $i^2=-1$ 这样的新数 i 之后，二次方程是一定能得解的。

实际上，解方程

$$x^2-2x+5=0 \qquad x^2+3x+4=0$$

$$2x^2-3x+5=0$$

时，其解分别为

$$1\pm 2i, \quad -\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{31}}{4}i$$

所以，如 $1+2i$， $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$， $0.26+(-1.5)i$，$-2i$ 这样的数，是由实数 a， b 和新数 i （$i^2=1$），按

$$a+bi \qquad (b\neq 0)$$

的形式作出的，把这个数叫做**虚数**，把 i 叫做**虚数单位**。

$1+2i$ 和 $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ 这样的虚数，虽然是两个数相加的形式，但它却表示一个数。而且想把 $1+2i$ 的 1 与 $2i$ 再概括为更简单的形式,来表它是不可能的。

$a+bi$ 这个数，附加 $b\neq 0$ 条件的原因是，因为如果 $b=0$ 时,像 $2+0i=2$,$\sqrt{3}+0i=\sqrt{3}$ 这样，就成为实数了。

把虚数也考虑在内，二次方程一定是可解的。

然而，“还得作出虚数这样的新数，不特意地去解它行不行”没这样 想过吗？

大家最初只知道正数，开始学习负数时，也许是很难懂的。但是经常使用负数以后，就达到运用自如的地步，也逐渐知道了负数该有多么重要。另外，也逐渐了解到关于无理数也是如此。因为它能与现实的量密切结合，它无论如何也是非常必要的数。

虚数被确认为数，并且和实数一样作为数加以考虑的，是德国数学家高斯（图3）。在数学上以及其它科学领域中，由于使用了虚数，使一些解释更加简单，使科学有所进展的情形是很多的。

所以，大家如果进一步努力学习数学，也能和实数一样，把虚数作为实在的数，掌握到运用自如的程度。

在这里，对二次方程作最后的总结，把三个二次方程

$$2x^2+3x-1=0 \quad \cdots\cdots(a)$$

$$x^2-6x+9=0 \quad \cdots\cdots(b)$$

$$x^2-4x+13=0 \quad \cdots\cdots(c)$$

用求解的公式去解，得

$$(a)\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$(b)\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2}=\frac{6\pm 0}{2}=3$$

$$(c)\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$$

(a)的解是二实数，(b)的解是一个实数的重根，(c)的解为二虚数。而解是实数或虚数，是由公式中$\sqrt{\ }$里的符号确定的。

判别式和方程

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$ax^2+bx+c=0$ 的解	二实数	一个实数（重根）	二虚数
$y=ax^2+bx+c$ 的图象和 x 轴	交于两点	接于一点	不接触
方程的例子	$2x^2+3x-1=0$	$x^2-6x+9=0$	$x^2-4x+13=0$

由于二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解是

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

当 a，b，c 都是实数时，由$\sqrt{\ \ }$里的 b^2-4ac的符号，决定二次方程解的种类变化。因此，称 b^2-4ac为二次方程

解（根）的判别式。

当 a，b，c 为实数时，根据判别式的符号，可知

（a）　$b^2-4ac>0$ 时，解为二实根

（b）　$b^2-4ac=0$ 时，解为实重根

（c）　$b^2-4ac<0$ 时，解为二虚根

应用这一结果，既使不解二次方程，也可以确定解是实数还是虚数。例如在

$$2x^2-6x+3=0$$

中，因为 $a=2$，$b=-6$，$c=3$

$$b^2-4ac=12$$

所以方程的解为二实数。

【想一想】　试检验下列方程的解是上述（a），（b），（c）三种情况的哪一种？

（1）　$x^2+5x+6=0$　　（2）　$2x^2-3x+4=0$

【略　解】（1）　（a），　（2）　（b）

§2. 复　数

（1）　复　数

在前节的第 129页，把 $-2+4i$，$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i$ 形如

$a+bi$　（a，b 实数，且 $b\neq0$）

的数，叫做虚数。

然而，考虑 $a+bi$ 中的 b 是0 的情况，得到这样的数

$$3+0i,\quad -\frac{3}{2}+0i,\quad \frac{\sqrt{5}}{3}+0i,\quad -1.83+0i$$

设 $0i=0$ 时，则这些数与实数

$$3,\quad -\frac{3}{2},\quad \frac{\sqrt{5}}{3},\quad -1.83$$

相同。

所以，b 也可以是零时，由二实数 a，b 表示出来的形如

$$a+bi$$

的数，作出各种各样的看一看。如

$$\left.\begin{array}{lll} 0+0i, & & \\ 3+0i, & -\frac{3}{2}+0i, & -1.83+0i \end{array}\right\}\text{实数}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2+4i, & -\frac{5}{3}+0.3i, & \sqrt{3}+(-\sqrt{2})i \\ 0+2i, & 0+3i, & 0+(-0.3)i \end{array}\right\}\text{虚数}$$

这样，实数和虚数两者都能表示出来。

当然，可以这样考虑：$0+0i=0$，$3+0i=3$

$0+\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$，$1i=i$。

如此，由实数 a，b，按 $a+bi$ 的形式写出的数，叫做复数。复数 $a+bi$，当 $b\neq 0$ 时是虚数，$b=0$ 时为实数、而复数是把实数和虚数放在一起的称呼。

关于复数也考虑它的集合问题

设Z表示复数全体的集合，实数全体的集合以及虚数全体的集合都是Z的子集。而且，由于实数全体和虚数全体合起来为Z，如图4，Z为全集时，实数集的余集是虚数集。

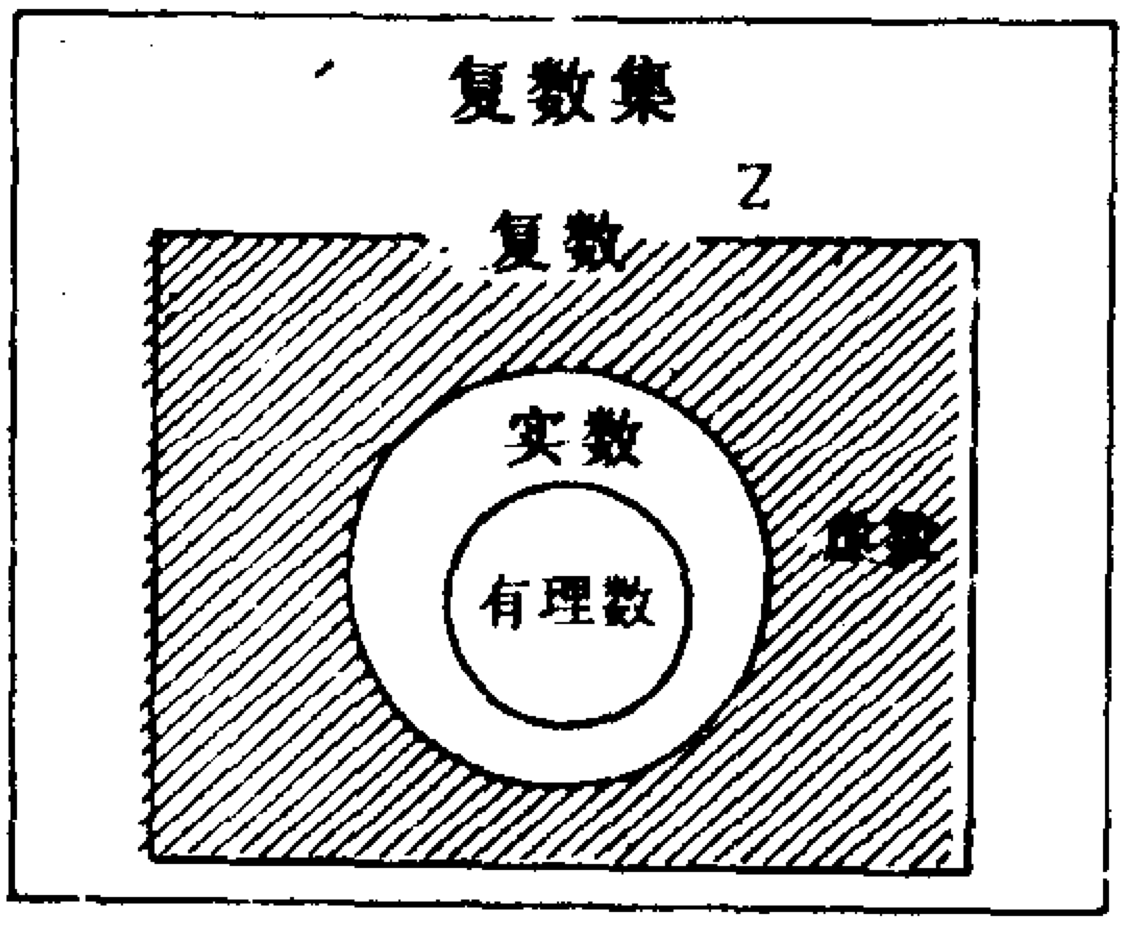


图 4

另外，把过去在本书中使用过的各种数，可分类如下：

复数
- 实数
  - 有理数
    - 整数
    - 分数
  - 无理数
- 虚数

在第二章的§1（参看第30页），已经讲过了实数能用直线上的点表示，与此相像地，复数可用平面上的点表示。

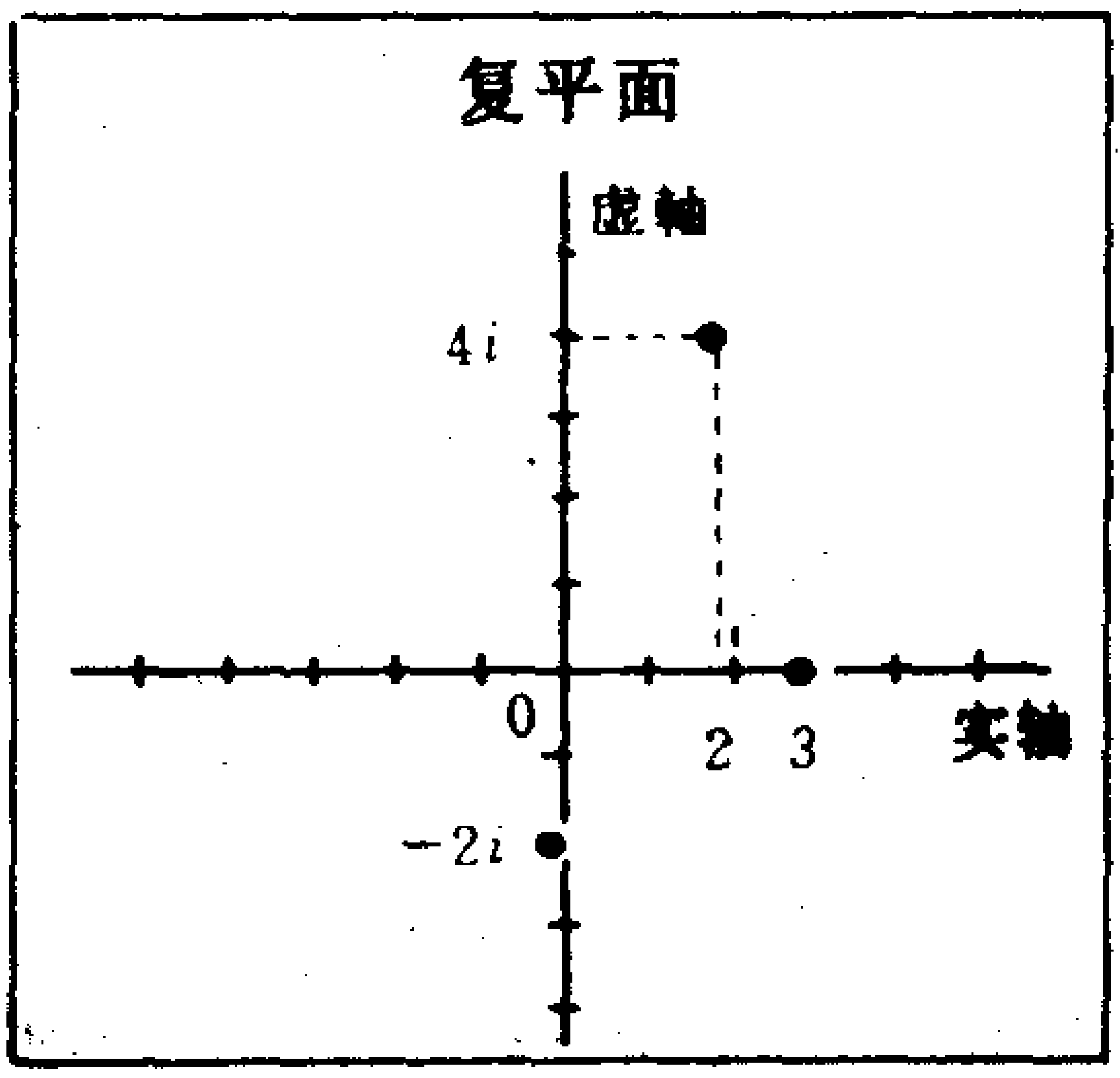


图 5

与坐标轴相同，在平面上引两条垂直相交的直线，如图5，分别叫做**实轴**，**虚**

轴。

于是，在这个平面上，把坐标为（2，4），（3,0），（0，−2）的点，分别看作是复数 $2+4i$，3，$2i$ 表示的点。

一般地，我们就

把复数 $a+bi$ 表示坐标为（a，b）的点。

全体复数和平面上的点是一一对应的。

如此，把用复数表示的平面叫做复平面，也有叫高斯平面的。使用复平面后，更容易研究复数的各种性质。

【想一想】 在图5 中，把下列各点写在复平面上。

① $4-3i$ ② $3i$ ③ $-1-i$

（2） 复数的运算

在实数中，两个以上的数之间可以进行加减乘除四种运算，并且有

交换律 $a+b=b+a$ $ab=ba$

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$

分配律 $a(b+c)=ab+bc$

这些定律成立。在复数中也可以进行这四种运算，交换，结合，分配等定律也成立。

首先，规定复数 a_1+b_1i 和 a_2+b_2i 的加法和减法运算是

○ $(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

○ $(a_1+b_1 i)-(a_2+b_2 i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

例如，在求$-2+4i$和$3+5i$ 的和与差时

$$(-2+4i)+(3+5i)=(-2+3)+(4+5)i$$
$$=1+9i$$

$$(-2+4i)-(3+5i)=(-2-3)+(4-5)i$$
$$=-5-i$$

把 i 看成一般字母计算即可。

其次，求$-2+4i$和$3+5i$的乘积，可如

$$(-2+4i)(3+5i)=-6-10i+12i+20i^2$$
$$=-6+2i+20i^2$$

应用 $i^2=-1$ ，则为

$$=-6+2i-20=-26+2i$$

如用字母表示时，因为

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2 i^2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

所以复数乘法被规定为

○ $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

下面再考虑除法

$a_1+b_1 i$除以$a_2+b_2 i$，也可以把它看作是$a_1+b_1 i$ 乘以

$$\frac{1}{a_2+b_2 i},$$

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)}$$

$$=\frac{(a_1 a_2+b_1 b_2)+(a_2 b_1-a_1 b_2) i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

因为得到这个结果，所以规定复数的除法为

$$\circ\ \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

二复数的乘法和除法运算，无需记住前面所说的规划，则在实际中能作出计算也就可以了。

例如，作 $-2+4i$ 除以 $3+5i$ 的计算时，既使不知道计算规则，能作如下计算可以得到结果。

$$\frac{-2+4i}{3+5i}=\frac{(-2+4i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\frac{(-6+20)+(12+10)i}{3^2+5^2}$$

$$=\frac{14}{34}+\frac{22}{34} i=\frac{7}{17}+\frac{11}{17} i$$

如上所述复数也和实数一样，规定了加法，减法，乘法，除法四种运算。而且，恰如在第 136 页也已经讲述过的，在加法和乘法中的交换，结合，分配等定律是成立的。

例如，所说的乘法交换律成立，就是分别计算

$$(a_1+b_1 i)\quad(a_2+b_2 i)$$

$$(a_2+b_2 i)\quad(a'_1+b_1 i)$$

能验证其结果相等就可以了。

因此，复数也和实数一样，它们都可以自由地进行运算。

那么，有没有在实数中存在而在复数中不存在的性质呢？

实际上，复数中二数之间的大小是不能很顺利地加以研究的。

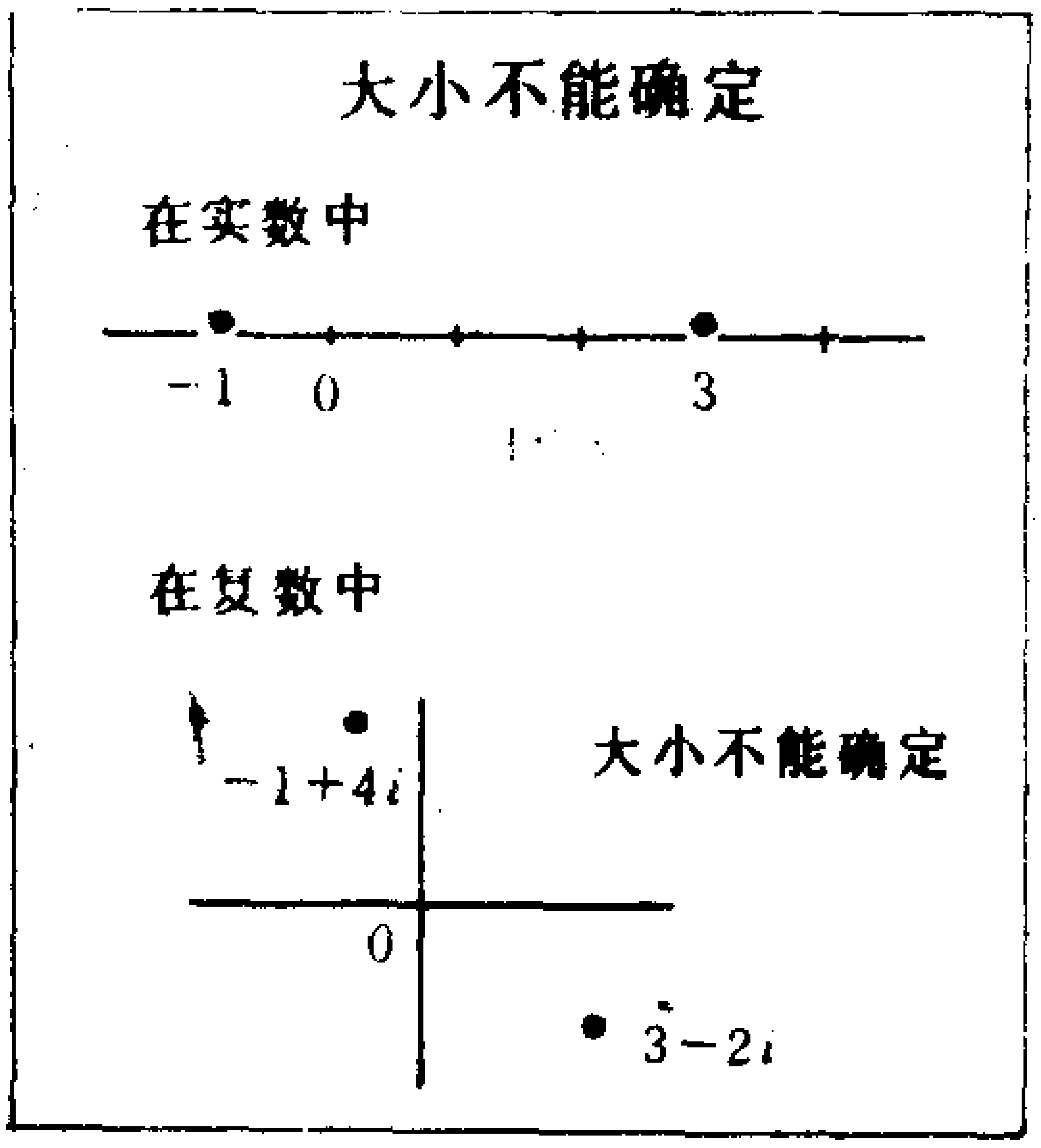


图 6

二实数在数轴上规定为，在右边的数比在左边的数大（参看第41页）。

但是，二复数 $3-2i$ 和 $-1+4i$，哪一个大就不能确定了。

在本书中，为了研究解一次方程和二次方程的需要，讨论了无理数和虚数这样的新数，一直到包含实数的叫做复数的数。研究到复数以后，不仅能解三次方程，四次方程的任何方程，并且能以更高的观点，来分析数学的基本内容。

【想一想】（1）$(2+3i)+(1-5i)$（2）$(2+3i)(1-5i)$

【略　解】（1）$3-2i$　（2）$17-7i$

编者的话

数学是与自然和社会现象一起发生和发展的。

例如，可以说物质的运动和变化，是产生函数的根源。情报的语言被使用，电子计算机已成为生活必须的东西了。在这方面，概率和新的代数在发挥作用。这套丛书也与自然和社会共同前进，希望读者能以学到活生生的数学。

另一方面，数学有它自己的体系。无论是数、方程式或几何，并不单纯是知识的罗列，而是一个具有逻辑性的体系。这套丛书将阐明这个体系，希望把它变成所有中学生自己的知识。

这套丛书，可以说不是用脑和手，而是用脚写成的。实际上，作者们每周每月都聚会在一起，与正在教课的教师们共同组成研究会，他们都是数学教育实践研究会的成员。共同讨论：学生应在什么地方下工夫？怎样组织使所有学生都能接受的教学内容等问题。讨论并在实践中把这些问题明确起来。可以说，它的成果就是这套丛书。从这个意义上来说，我想各位教师也起了重要作用。

横地　清

日本中学生数学丛书〈全12卷〉 横地 清编

1.	集合与逻辑	横地 清 编	马忠林 译
2.	数的世界	森川几太郎 编	关桐书 译
3.	文字的世界	山岸雄策 编	刘正一 译
4.	方 程 式	村野英克 编	任永泰 译
5.	不等式与区域	冈部 进 编	李素苹 译
6.	代数与构造	高桥秀雄 编	高绪珏 译
7.	函数与变化	菊池乙夫 编	李开成 译
8.	函数与分析	冈森博和 编	阎邦正 译
9.	几何与证明	中東正立 编	布 公 译
10.	运动与变换	大山正信 编	刘凤璞 译
11.	空间与坐标	平冈 忠 编	王家彦 译
12.	概率与统计	町田彰一郎 编	苏明礼 译

吉林师大数学系马忠林审校　　吉林人民出版社出版

一九八〇年元月

封面设计：王劲涛

统一书号：13091 · 69

定　价：五角五分

封面
书名
版权
前言
目录

目　　录

第一章谈谈集合
§1　　事物的集体
（1）集合
（2）子集与全集
§2　　并集和交集
（1）“或”和“与”
（2）并集和交集
§3　　点的集合
（1）点和直线
（2）直线和平面
第二章数与方程
§1　　数集与数轴
（1）整数与有理数
（2）数轴
（3）无理数
§2　　等式和不等式
（1）什么是等式？
（2）等式的性质
（3）不等式和区间
§3　　方程和它的解
（1）什么是方程？
（2）方程的解
方程的历史（其一）
第三章　　一次方程
§1　　同解变形
（1）同解方程
（2）同解变形
§2　　一次方程的解法
（1）一次方程的解法
（2）各种例子
§3　　多变数的方程
§4　　联立方程
（1）联立方程
（2）联立方程的解法
（3）三元一次联立方程
§5　　方程与图象
（1）坐标

（2）方程和图象
（3）图象和方程的解
方程的历史（其二）
第四章二次方程
§1　　二次方程
（1）二次方程
（2）平方根
§2　　二次方程解的公式
（1）二次方程的解法
（2）二次方程解的公式
§3　　因式分解与二次方程
§4　　二次方程和二次式的图象
（1）二次式的图象
（2）二次方程的解和二次式的图象
第五章复数
§1　　虚数
（1）负数的平方根
（2）虚数
§2　　复数
（1）复数
（2）复数的运算
编者的话